Optimale Kontrolle der Service-Intensität eines Wartesystems

Martingalmethoden, Minimumprinzipien

Karl-Heinz Keil

1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535715_0035

DISSERTATIONS– UND FOTODRUCK FRANK oHG
8 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2 8 0 9 0 9 0

Optimale Kontrolle der Service-Intensität eines Wartesystems

Martingalmethoden, Minimumprinzipien

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Grades Doctor rerum politicarum
(Dr. rer. pol.)
an der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Dipl.-Math. Karl-Heinz Keil

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. F. Ferschl
Korreferent: Prof. Dr. K. Weichselberger

Beginn der mündlichen Prüfungen: 5. Februar 1979
Tag der Promotion: 26. Februar 1979

Meinem Vater

† 4. Februar 1979

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Vorwort		I - III
Symbolverzeichnis		IV - V
1.	Einleitung	1
1.1.	Zugrundeliegendes Wartemodell	1
1.2.	Grundlegende Begriffe und Bezeichnungsweisen	4
	1.2.1. Stochastische Prozesse	4
	1.2.2. Filtration eines Meßraums	7
	1.2.3. Stopzeiten	9
1.3.	Einiges zur Kontrolle dynamischer Systeme	12
2.	Warteprozesse als Geburts- und Todesprozesse mit von ihrer eigenen Vergangenheit abhängigen Geburts- und Todesintensitäten	16
2.1.	Heuristische Vorbetrachtungen	16
2.2.	Punktprozesse auf $\mathbb{R}_+$	18
2.3.	Paare von Punktprozessen auf $\mathbb{R}_+$, Warteprozesse	22
2.4.	Markierte Punktprozesse auf $\mathbb{R}_+$, insbesondere zweiwertige Punktprozesse	31
2.5.	Konstruktion stochastischer Warteprozesse bei gegebener Input- und Service-Intensität	34
3.	Zustandswahrscheinlichkeiten intensitätserzeugter Warteprozesse	46
3.1.	System der Zustandsgleichungen	46
3.2.	Unendliche Differentialgleichungssysteme, Approximation mittels endlicher Systeme	51

4. Optimierungsmodell 59

4.1. Formulierung des stochastischen Kontrollmodells 59

4.2. Ein deterministisches Kontrollmodell und seine Beziehung zum stochastischen Kontrollmodell 63

5. Methoden der deterministischen Kontrolltheorie I : Minimumprinzip von Pontrjagin 66

5.1. Allgemeiner kontrolltheoretischer Rahmen für das deterministische Kontrollproblem, Existenz optimaler Kontrollen 66

5.2. Minimumprinzip von Pontrjagin, Anwendungen 71

5.3. Beispiele 76

6. Methoden der deterministischen Kontrolltheorie II : Minimumprinzip von Bellman 83

6.1. Deterministische Wertfunktion, Minimumprinzip von Bellman, partielle Differentialgleichung vom Hamilton-Jacobi'schen Typ 84

6.2. Minimumprinzip zur Bestimmung optimaler Markovscher Service-Intensitäten 89

6.3. Beispiel 93

Anhang 1 : Hinreichende Bedingung für die Martingaleigenschaft eines stochastischen Prozesses 97

Anhang 2 : Differentialungleichung für unendliche Differentialgleichungssysteme 99

Literaturverzeichnis 102

Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der optimalen dynamischen Steuerung der Service-Intensität eines Wartesystems über einen endlichen Zeitraum, wobei diese in beliebigen Zeitpunkten zwischen einem maximalen und minimalen Wert variiert werden kann.

Die bei der Behandlung vieler Optimierungsprobleme der Warteschlangentheorie dominierende Semi-Markov-Entscheidungstheorie (siehe STIDHAM/PRABHU) ist hier nicht anwendbar. Dies liegt in erster Linie daran, daß die Menge der Entscheidungszeitpunkte und die der für die Service-Intensität wählbaren Werte ein Kontinuum bilden.

Wegen dieser Fixierung auf die Semi-Markov-Entscheidungstheorie ist es nicht verwunderlich, daß die Anregungen zum Studium dieses für die Praxis interessanten "stetigen" Modells von außerhalb der Warteschlangentheorie herrühren. Sie entstammen recht abstrakten Untersuchungen über (markierte) Punktprozesse, als deren mögliche Anwendung diese Optimierungsprobleme der Warteschlangentheorie neben etwa solchen wie dem Filtern von Signalen in der Informationstheorie gelten. (Einen ausführlichen Überblick bietet BREMAUD/JACOD, allerdings ohne auf die Kontrollproblematik ausführlich einzugehen.)

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war ein Artikel von BREMAUD über Bang-Bang-Kontrollen von Punktprozessen, der ein kurzes, die Warteschlangentheorie betreffendes Beispiel liefert, das jedoch dieser Theorie nicht voll gerecht wird.

Die Verallgemeinerung des Intensitätsbegriffs bei Punktprozessen (siehe BREMAUD) und dessen rigorose Ausdehnung auf markierte Punktprozesse (siehe JACOD) bilden das Fundament zur Konstruktion einer ziemlich allgemeinen Klasse von stochastischen Warteprozessen, ohne die das Steuerungsproblem überhaupt nicht sinnvoll formulierbar wäre.

Leider reißt bei den allgemeinen Untersuchungen über markierte Punktprozesse die Verbindung zur herkömmlichen Auffassung von Warteprozessen sehr schnell ab (siehe BREMAUD, JACOD und BREMAUD/JACOD). So ist etwa auch die Anwendung von Radon-Nikodym-Ableitungen auf dem gemeinsamen Trajektorienraum der markierten Punktprozesse (Transformationen vom Girsanov'schen Typ) wie bei BREMAUD/JACOD vom anwendungsorientierten Standpunkt erst dann gerechtfertigt, wenn zuvor ein konstruktiver Zugang erfolgt ist.

Diese Arbeit versucht zunächst, sich der Verallgemeinerung des Intensitätsbegriffs und damit zusammenhängender Ergebnisse bedienend, die Konstruktion stochastischer Warteprozesse bei gegebener Input- und Service-Intensität motivierend, interpretierend und geschlossen mit einem Minimum an abstrakten Hilfsmitteln aus der "théorie générale des processus stochastiques" (siehe MEYER, DELLACHERIE und DELLACHERIE/MEYER) darzustellen. Dabei konnte auf eine gewisse Ausführlichkeit nicht verzichtet werden, weil bereits in der Angewandten Stochastik vertraute Begriffe (neben "Intensität" etwa "stochastischer Prozeß") einer strengeren Fassung bedurften.

Die vorliegende Arbeit läßt sich in zwei Teile gliedern:

Der erste, wahrscheinlichkeitstheoretische Teil (Kapitel 1 mit 3) geht zwar von Kontrollaspekten aus, ist jedoch von relativ selbständigem Interesse auch für die deskriptive Warteschlangentheorie.

Der zweite Teil (Kapitel 4 mit 6) umfaßt die Optimierungsproblematik, wobei die deterministische Kontrolltheorie ausgiebige Verwendung findet.

Der Übergang vom stochastischen Kontrollproblem zu einem deterministischen stützt sich auf Folgerungen aus der Gestalt des Systems der Zustandsgleichungen. Die hier durchgeführten Überlegungen verallgemeinern die von BREMAUD.
Das Markovisierungsprinzip in Abschnitt 4.1. ist neu, ebenso die konsequente Anwendung von Methoden der deterministischen Kontrolltheorie.

Ebenfalls neu ist der im 6. Kapitel beschrittene Weg ausgehend von deterministischen Kontrollaussagen zurück zu solchen stochastischen Charakters.

Umfangreiche explizite Ergebnisse sind allerdings bei der Komplexität der aus den Minimumprinzipien abgeleiteten Differentialgleichungssysteme nicht zu erwarten. Die Beispiele zeigen aber doch die Anwendbarkeit der Minimumprinzipien.

Anmerkungen:

a) Daß mir die für Abschnitt 3.2. wichtige Arbeit von LEDERMANN/REUTER bekannt war, verdanke ich Prof. Dr. Ferschl.

b) Auf die Idee zur Verwendung von Differentialungleichungen in Abschnitt 3.2. brachte mich der Hinweis von Prof. Dr. Deimling, daß die bei Geburts- und Todesprozessen auftretenden Intensitätsmatrizen die Eigenschaft der "Quasimonotonie" besitzen.

c) Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit stieß ich auf den Artikel

BOEL, R./ VARAIYA, P. (1977): Optimal Control of Jump Processes; Siam J. Control and Optimization, vol. 15, No. 1, 92-119,

der in einem Anwendungsbeispiel auf ähnliche Ergebnisse wie hier in Abschnitt 6.2. hindeutet. Dabei werden völlig andere Methoden verwendet. Die deterministische Kontrolltheorie wird nicht berührt. Es steht vielmehr der Begriff der "Wertfunktion des Kontrollproblems" im Mittelpunkt. Diese Wertfunktion wird dort als stochastischer Prozeß betrachtet; siehe hingegen Abschnitt 6.1. hier.

Leider bleibt bei BOEL/VARAIYA durch den abstrakten Ansatz und die sehr allgemeine Zielsetzung das für die Warteschlangentheorie Wesentliche verborgen.

Symbolverzeichnis

M, D, D/M, F/R — Abkürzungen für die zitierte Literatur MEYER, DELLACHERIE, DELLACHERIE/MEYER, FLEMING/RISHEL

$\triangleright$ — Schlußmarkierung bei Beweisen und Beispielen

$\Delta f(t) = f_t = f(t) - f(t-)$ für eine relle Funktion f, wobei

$$f(t-) = f_{t-} = \lim_{\substack{s \to t \\ s \leq t}} f(s)$$

$f|_M$ — Restriktion einer Funktion auf die Menge M

$$I(A) = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn die Aussage A zutrifft} \\ 0 & , \text{ wenn die Aussage A nicht zutrifft} \end{cases}$$

$\chi_M(x) = I(x \in M)$

$\dot{f}$ — Ableitung einer Funktion f

F_x — Funktionalmatrix einer Funktion $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^r, \quad (x,y) \longmapsto F(x,y)$ bei Differentiation nach dem Vektor x

Vektoren sind als Spaltenvektoren aufzufassen

A' — Transponierte einer Matrix A

$\delta_{i,j}$ — Kroneckersymbol, $\delta_{i,j} = I(i=j)$

$(a)_i = a_i$ — für einen Spaltenvektor $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)'$

Pot E — Potenzmenge einer Menge E

$\mathcal{B}(.)$ — Borelsche Mengen des in Klammern stehenden topologischen Raumes

$\sigma(\,.\,)$ σ-Algebra, die von den in Klammern stehenden Objekten erzeugt ist, also etwa

$\sigma(X_s, s\le t)$ im Falle von Funktionen X_s, $s\in\mathbb{R}_+$, $s\le t$, oder

$\sigma(\bigcup_{i\in I}\mathcal{E}_i)$ im Falle von σ-Algebren $\mathcal{E}_i$, $i\in I$

$$\bigvee_{i\in I}\mathcal{E}_i = \sigma\Big(\bigcup_{i\in I}\mathcal{E}_i\Big)$$

$\prod_{i\in I} E_i$ kartesisches Produkt der Mengen E_i, $i\in I$

$\bigotimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$ Produkt-σ-Algebra aus den σ-Algebren $\mathcal{E}_i$, $i\in I$
auch
$\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2$ geschrieben, falls $I = \{1,2\}$

1. Einleitung

1.1. Zugrundeliegendes Wartemodell

Wir betrachten innerhalb eines endlichen Zeithorizontes ein aus einer Servicestelle und einem beschränkten (endlich viele Plätze umfassenden) Warteraum bestehendes Wartesystem, dessen Service-Intensität in dem Sinne stetig steuerbar ist, daß sie in jedem beliebigen Zeitpunkt variiert werden kann und jeden beliebigen Wert aus einem kompakten Intervall annehmen darf.

Keinesfalls soll unter stetiger Steuerbarkeit verstanden werden, daß die Service-Intensität in Abhängigkeit von der Zeit einen stetigen Verlauf zu haben hat. Allerdings wird man ganz ohne Regularitätsbedingungen nicht auskommen; diese dürften jedoch in praktischer Hinsicht keine Einschränkung bedeuten.

Die Evolution des Systems wird beschrieben durch den (endogenen) Prozeßverlauf der sich im System befindenden Einheiten und den (exogenen) Prozeßverlauf der Steuerung (Service-Intensität).

Eine Bewertung des Systemverlaufs und eine entsprechende Optimalitätsforderung verleihen der Steuerung eine Zielrichtung.

Ohne auf exakte Voraussetzungen einzugehen, wird nun ein recht allgemeines Modell skizziert, das eine Motivation für die bis zur exakten Beschreibung zu leistenden Vorarbeiten liefern soll.

$[0,t_e]$ sei der fest vorgegebene endliche Zeithorizont. Zum Zeitpunkt $s\in[0,t_e]$ seien Q_s Einheiten (Kunden) im System, die Service-Intensität sei μ_s.

Die Bewertung des Systemverlaufs geschehe mittels

a) einer Kostenrate $c(s,Q_s,\mu_s)$ und

b) einem Kostenbetrag $\Phi(Q_{t_e})$, der der Endlichkeit des Zeithorizonts Rechnung trägt.

Hieraus ergeben sich dann die als Bewertung eines Systemverlaufs fungierenden Gesamtkosten

$$C = \int_0^{t_e} c(s,Q_s,\mu_s)ds + \Phi(Q_{t_e}) .$$

Und die Optimalitätsforderung lautet:

Minimiere die zu erwartenden Gesamtkosten EC unter der Nebenbedingung

$$\mu_s \in [\underline{m},\overline{m}] ,$$

wobei die nicht-negativen Zahlen $\underline{m}$ und $\overline{m}$ als minimale und maximale Service-Intensitäten vorgegeben sind.

Diese Skizze eines stochastischen Kontrollproblems wirft sofort einige Fragen auf:

Die Steuerung in einem Zeitpunkt des Zeithorizontes hängt vom beobachteten Verlauf des Systems ab. Wie läßt sich nun die Informationsstruktur mathematisch in den Griff bekommen?

Um den Erwartungswert überhaupt sinnvoll bilden zu können, muß man die den Systemverlauf beschreibende Wahrscheinlichkeit kennen und wissen, wie diese von der Steuerung abhängt, wie die Steuerung sich auf die "Dynamik" des Systems auswirkt.

Diesem Fragenkomplex werden wir uns in den ersten beiden Kapiteln widmen.

Zuvor noch einige Anmerkungen über eine naheliegende Erweiterung des Modells, das allerdings im weiteren unberücksichtigt bleibt, da die heute zur Verfügung stehenden mathematischen Methoden zu deren Behandlung nicht ausreichen.

Die Erweiterung des Modells betrifft die Möglichkeit eines vorzeitigen Stoppens des Systems:

Es sei T ein zufälliger (vom Systemverlauf abhängiger) Zeitpunkt $T \leq t_e$, in welchem das System gestoppt wird und sodann als Gesamtkosten

$$C = \int_0^T c(s,Q_s,\mu_s)ds + \Phi(T,Q_T)$$

auftreten, wobei nun der Kostenbetrag nicht nur vom Endzustand, sondern auch von der Beendigungszeit abhängt.

In der Praxis kann dieser Fall auftreten, wenn die "Servicekapazität" limitiert ist, d. h. eine Beschränkung der Form

$$\int_0^{t_e} \mu_s \, ds \leq \varkappa$$

mit einem vorgegebenen $\varkappa < \overline{m}\, t_e$ vorliegt.

Man denke beispielsweise an die Möglichkeit der "Überhitzung" von Maschinen oder den vorzeitigen Verbrauch eines "Treibstoffvorrates", die von vornherein ein ständiges Steuern mit der maximalen Service-Intensität nicht gestatten.

Es ergäbe sich $T = \inf\left\{ t \in \mathbb{R}_+ : \int_0^t \mu_s \, ds = \varkappa \right\} \wedge t_e$.

Für andere stochastische Prozesse als der hier den endogenen Verlauf beschreibende Prozeß gibt es entsprechende Untersuchungen; siehe BENSOUSSAN/LIONS. Dies sind vor allem die Wiener'schen Prozesse. Allerdings werden dabei einfachere zufällige Zeiten T vorausgesetzt, nämlich solche, welche nur vom momentanen Zustand des endogenen Prozesses abhängen, was bei obigem T offensichtlich nicht der Fall ist.

1.2. Grundlegende Begriffe und Bezeichnungsweisen

Wir passen uns im wesentlichen der Terminologie der "théorie générale des processus stochastique" an, wie sie etwa bei MEYER, DELLACHERIE und DELLACHERIE/MEYER zu finden ist.
Eine gewisse Vertrautheit mit Grundtatsachen dieser Theorie muß vorausgesetzt werden. In Beweisen etwa wird auf die genannten Bücher bezug genommen. Dabei wird abkürzend M, D und D/M verwendet.

In diesem Abschnitt 1.2. erfolgt eine Festlegung der Begriffe. Dies erscheint auch für Begriffe notwendig, welche in der Angewandten Stochastik bereits einen festen Platz einnehmen. Aber nicht selten muß eine Verallgemeinerung und eine dieser Arbeit angemessene Akzentuierung vorgenommen werden, wobei dies nicht ohne Interpretation geschehen soll.

1.2.1. Stochastische Prozesse

Eine inhaltliche Trennung zwischen Prozessen und stochastischen Prozessen ist für das Weitere unerläßlich, auch wenn später kurzerhand von Prozessen in beiden Fällen gesprochen wird.

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ und $(E,\mathcal{E})$ zwei Meßräume und I eine nicht-leere Menge. Unter einem Prozeß auf $(\Omega,\mathcal{F})$ mit Werten in $(E,\mathcal{E})$ und mit Parametermenge I versteht man eine Abbildung

$$X : I\times\Omega \longrightarrow E$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $t\in I$

$$X_t := X(t,.) \qquad \mathcal{F}\text{-}\mathcal{E}\text{-meßbar ist.}$$

Für X schreibt man auch $(X_t)_{t\in I}$ oder einfach (X_t).

Ist auf $(\Omega,\mathcal{F})$ eine Wahrscheinlichkeit P gegeben, so heißt X stochastischer Prozeß.

Es wird auf Bezeichnungsballast verzichtet, wenn der Sachverhalt aus dem Zusammenhang unmißverständlich zu erkennen ist. Andererseits wird zu dessen Klarstellung oftmals eine Zusammenfassung uns interessierender Objekte zu Paaren, Tripeln, etc. vorgenommen. Man spricht dann beispielsweise von den (stoch.) Prozessen (X,P_1) und (X,P_2), wenn P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeiten auf $(\Omega,\mathcal{F})$ sind.

Wir werden nur mit Prozessen arbeiten, bei welchen I die Zeit verkörpert, also I ein Intervall in $\mathbb{R}_+$ ist.
Überdies haben wir es nur mit reellen Prozessen zu tun, d. h. $E \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{E}$ sei dann die Spur der σ-Algebra der Borelschen Mengen auf E.

Jedem Prozeß X kann sein kanonischer Prozeß zugeordnet werden: X induziert die sog. Trajektorienabbildung

$$\hat{X} \;:\; \Omega \longrightarrow E^I$$

durch $$\hat{X}(\omega) := (X_t(\omega))_{t\in I} \quad .$$

$\hat{X}$ ist offenbar $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}^I$-meßbar, $(E^I,\mathcal{E}^I)$ heißt sein kanonischer Meßraum.
$\hat{P}$ sei die Bildwahrscheinlichkeit $P\circ\hat{X}^{-1}$ von P unter der Abbildung $\hat{X}$.
Dann ist mit π_t als t-te Projektion von E^I auf E in kanonischer Weise der Prozeß $(\pi_t)_{t\in I}$ auf $(E^I,\mathcal{E}^I)$ mit Werten in $(E,\mathcal{E})$ und Parametermenge I bzw. der stochastische Prozeß $((\pi_t),\hat{P})$ gegeben.

Die Trajektorienmenge $\hat{X}(\Omega)$ [1] des Prozesses ist meist eine echte Teilmenge von E^I und nicht $\mathcal{E}^I$-meßbar.

Der Meßraum $(\hat{X}(\Omega), \hat{X}(\Omega)\cap\mathcal{E}^I)$ wird als Trajektorienmeßraum von X bezeichnet.

---

1) Man beachte: $\hat{X}(\Omega)$ ist das Bild von Ω unter der Abbildung $\hat{X}$.

Der kanonische Meßraum spielt eine herausragende Rolle bei der Konstruktion eines stochastischen Prozesses bei gegebenem Zustandsraum, gegebener Parametermenge und einer gegebenen Familie konsistenter endlichdimensionaler Verteilungen. Man denke an den bekannten Satz von Kolmogorov, siehe BAUER, p.347.

Eine ähnliche Bedeutung kommt dem Trajektorienmeßraum zu, wenn neben den oberen Charakteristiken eine Trajektorienmenge gegeben ist.

In beiden Fällen ist dann nur eine Wahrscheinlichkeit auf dem jeweiligen Meßraum zu konstruieren: Als X_t hat man die t-te Projektion bzw. deren Restriktion auf die Trajektorienmenge.

Die Konstruktion von Warteprozessen wird von einem Trajektorienraum ausgehend vorgenommen. Dabei wird die Familie der endlichdimensionalen Verteilungen durch eine Anfangsverteilung und eine Familie von Übergangswahrscheinlichkeiten erzeugt. Mit Hilfe des Satzes von Ionescu-Tulcea, siehe NEVEU, p.194, läßt sich ein expliziter Rückgriff auf erstere Familie ersparen.

Die weiteren Begriffe gehen von $I = \mathbb{R}_+$ aus. Die spätere Anwendung auf ein I der Form $[0,t_e]$ ist problemlos durchführbar. Außerdem betrachten wir nur reellwertige Prozesse.

Ein Prozeß $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>meßbar</u>, wenn X bezüglich der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ meßbar ist.

Ist ein Prozeß X meßbar, so sind nach dem Satz von Fubini alle Trajektorien $X(.,\omega) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar, was etwa bei der Bildung von $\int_0^t X(s,\omega)\,ds$ wichtig ist.

Auf der Menge $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ werden weitere σ-Algebren in Betracht zu ziehen sein, die sich jedoch auf den noch zu definierenden Begriff der Filtration des Meßraums $(\Omega,\mathcal{F})$ beziehen.

1.2.2. Filtration eines Meßraums

Sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Meßraum. Dann heißt eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ Filtration von $(\Omega,\mathcal{F})$, wenn die Familie isoton (aufsteigend) ist, d. h. wenn gilt

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } s,t\in\mathbb{R}_+ \text{ mit } s \leq t.$$

Man setzt $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$. Offensichtlich ist jede isotone Familie von σ-Algebren auf Ω eine Filtration von $(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$.

Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)$ heißt rechtsstetig, wenn für alle $t\in\mathbb{R}_+$

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{t<s} \mathcal{F}_s \quad \text{gilt.}$$

Die Rechtsstetigkeit ist eine wichtige Eigenschaft spezieller Filtrationen; sie ist als Voraussetzung in vielen interessanten Aussagen der "théorie générale des processus stochastiques" unentbehrlich.

Ist $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration von $(\Omega,\mathcal{F})$, so nennt man das Tripel $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ ein dynamisches System. In diesem Zusammenhang ist $(\Omega,\mathcal{F})$ als System schlechthin aufzufassen und die Filtration $(\mathcal{F}_t)$ als "Geschichte" des Systems interpretierbar, wobei $\mathcal{F}_t$ gerade diejenigen Ereignisse enthält, welche die bis zum Zeitpunkt t beschreibbaren Phänomene repräsentieren.

Im speziellen Fall $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, woraus $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ für alle $t\in\mathbb{R}_+$ folgt, ist $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ im folgenden Sinne ein deterministisches dynamisches System:
Alle überhaupt möglichen Ereignisse werden bereits durch die im Zeitpunkt t=0 beschreibbaren Ereignisse repräsentiert. Kennt man des "Anfangszustand" des Systems, so ist auch dessen gesamte weitere Entwicklung bekannt. Diese läuft dann eben determiniert ab; der Zufall spielt höchstens bei der Realisierung des "Anfangszustandes" eine Rolle.

Jeder Prozeß X auf dem Meßraum $(\Omega,\mathcal{F})$ induziert auf diesem eine Filtration $(\mathcal{F}^X_t)$, nämlich $\mathcal{F}^X_t := \sigma(X_s, s\leq t)$. Sie wird als die natürliche Filtration oder die minimale Geschichte von X bezeichnet.

Jede Filtration $(\mathcal{F}_t)$ mit $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ heißt dann Geschichte des Prozesses X.

Ist $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ ein dynamisches System, so heißt ein Prozeß X $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert oder nicht-antzipativ bezüglich $(\mathcal{F}_t)$, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Zufallsvariable X_t $\mathcal{F}_t$-meßbar ist, d. h. $(\mathcal{F}_t)$ eine Geschichte von X darstellt.

Sind beispielsweise einem dynamischen System ein Beobachtungsprozeß und ein Steuerungsprozeß beigeordnet, so wird man i. a. davon ausgehen, daß der Beobachtungsprozeß nicht-antizipativ bzgl. der Geschichte des Systems ist und der Steuerungsprozeß der minimalen Geschichte des Beobachtungsprozesses adaptiert, also intuitiv gesprochen nur Vergangenheit und Gegenwart und nicht die Zukunft des Sytems beobachtet werden kann und die Steuerung des Systems in Abhängigkeit von der Beobachtung geschieht.

Eine besonders wichtige Klasse von Prozessen bilden die Martingale:

Sei $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ ein dynamisches System und P eine W. darauf.

Dann versteht man unter einem $(P,\mathcal{F}_t)$-Martingal einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten stochastischen Prozeß (M_t) mit :

- M_t ist P-integrierbar für alle $t \in \mathbb{R}_+$
- Für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$ mit $s \leq t$ ist

$$E\,(\,M_t \mid J_s\,) \;=\; M_s \qquad P\text{-fast.}$$

1.2.3. Stopzeiten

Es sei ein dynamisches System $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ gegeben.

Eine Abbildung $T : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$

heißt Stopzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)$ (auch: $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit),

wenn für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ .$$

Eine Stopzeit ist also insbesondere eine nicht-negative Zufallsvariable auf dem Meßraum $(\Omega,\mathcal{F})$, und zwar im erweiterten Sinn (d. h. der Wert ∞ ist auch zugelassen).
Den bisherigen Interpretationen entsprechend kann man eine Stopzeit als eine zufällige Zeit auffassen, die folgende Eigenschaft besitzt: Kennt man die Geschichte des Systems, so läßt sich in jedem Zeitpunkt alleine aus der Vergangenheit des Systems sagen, ob sich diese zufällige Zeit bereits realisiert hat oder nicht.

Als Beispiele für Stopzeiten würde man somit Zeitpunkte des erstmaligen Auftretens eines Ereignisses und nicht etwa die des letztmaligen Auftretens eines Ereignisses ansehen.

Wenn die Intuition auch die richtige Richtung bei der Suche nach Beispielen für Stopzeiten weist, so basiert die endgültige Entscheidung ob etwa im Falle eines Prozesses X das erstmalige Erreichen einer Niveaumenge, d. h. $\inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X(t) \leq c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$, wirklich eine $(\mathcal{F}_t^X)$-Stopzeit ist, auf tiefliegenden Ergebnissen der Theorie der Kapazitäten, deren Anwendung nicht ohne Voraussetzungen an die Filtration bzw. Regularität und Meßbarkeit des Prozesses X möglich ist.
In gutgearteten Fällen, wie es die konkreten Prozesse in der Praxis sind, läßt sich der Nachweis leichter führen. Man siehe LIPSTER/SHIRYAYEV, 1.3.3.

(Man beachte, daß in der russischen Literatur bzw. deren englischer Übersetzung eine Stopzeit als "markov time" und Stopzeiten, die fast sicher endlich sind, als "stopping times" bezeichnet werden.)

Ist T eine Stopzeit, so läßt sich leicht zeigen, daß

$$\mathcal{F}_T := \{ A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+ \}$$

eine σ-Algebra ist, welche σ-Algebra der Ereignisse vor T oder σ-Algebra der T-Vergangenheit heißt.
Offensichtlich ist eine Stopzeit T $\mathcal{F}_T$-meßbar.

Hat man einen meßbaren Prozeß X und eine endliche Stopzeit T, so ist der "Zustand des Prozesses im (zufälligen) Zeitpunkt T"

$$X_T(\omega) := X(T(\omega),\omega)$$

eine Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathcal{F})$.

Es ist nun nicht selbstverständlich, daß die Zufallsvariable X_T $\mathcal{F}_T$-meßbar ist, d. h. meßbar bezüglich der σ-Algebra der T-Vergangenheit. Dazu benötigt man stärkere Meßbbarkeitseigenschaften von X, etwa die der noch zu definierenden Wohlmeßbarkeit. Die von uns in diesem Zusammenhang betrachteten Prozesse sind wohlmeßbar, so daß die $\mathcal{F}_T$-Meßbarkeit von X_T gemäß D/M,th 64 b, gesichert ist.

Ist X ein wohlmeßbarer Prozeß und T eine beliebige Stopzeit, so ist $(X_{t\wedge T})$ ein Prozeß und wird als der aus X durch Stoppen mit T erhaltene Prozeß bezeichnet.

Hat man zwei Abbildungen S und T von Ω nach $[0,\infty]$, so definiert man das (links geschlossene und rechts offene) stochastische Intervall

$$[\![S,T[\![:= \{ (t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) \leq t < T(\omega) \}$$

und die übrigen $[\![S,T]\!]$, $]\!]S,T]\!]$, $]\!]S,T[\![$ und $]\!]S,T]\!]$ analog, wobei nur im Falle $\ldots,T]\!]$ für T vorausgesetzt wird, daß es nicht den Wert ∞ annimmt.
S und T waren nicht als Stopzeiten vorausgesetzt, obwohl der Begriff des stochastischen Intervalls erst in diesem Fall bei der Erzeugung von σ-Algebren auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ eine wichtige Rolle spielt.

Wir haben auf der Menge $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ bereits die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_m := \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ betrachtet. Wir werden darauf zwei weitere benötigen:

Die von den reellen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten Prozessen, welche rechtsstetige Trajektorien mit linksseitigen Limes besitzen, erzeugte σ-Algebra heißt σ-Algebra der wohlmeßbaren Mengen.[1)]

Die Definition der σ-Algebra der vorhersehbaren Mengen soll nur im Falle $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ Gültigkeit haben:
Die von den reellen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten Prozessen mit linksstetigen Trajektorien erzeugte σ-Algebra heißt σ-Algebra der vorhersehbaren Mengen.[1)]

Prozesse, die bezüglich einer der drei obigen σ-Algebren meßbar sind, werden meßbar (wie gehabt) bzw. wohlmeßbar bzw. vorhersehbar genannt. Die entsprechenden σ-Algebren kürzen wir mit $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_w$, $\mathcal{A}_v$ ab.

Es gilt: $\mathcal{A}_m \supset \mathcal{A}_w \supset \mathcal{A}_v$.

Was die Zusammenhänge zwischen der σ-Algebra der wohlmeßbaren Mengen bzw. der σ-Algebra der vorhersehbaren Mengen und den aus Stopzeiten gebildeten stochastischen Intervallen betrifft, muß auf eingangs angegebene Literatur verwiesen werden.

Es sei an dieser Stelle noch kurz auf vorhersehbare Prozesse eingegangen: Zwar hat dieser Begriff "etwas mit Linksstetigkeit zu tun", doch gibt es keine naheliegende, intuitive Fassung für die "infinitesimale Vorhersehbarkeit" des durch einen Prozeß beschriebenen Verhaltens eines Systems.
In allgemeineren (als den hier betrachteten) stochastischen Kontrollmodellen , muß - um zu ähnlichen Aussagen zu kommen -

1) "wohlmeßbar" und "vorhersehbar" beziehen sich stets auf eine gegebene Filtration. Es ist von vornherein unüblich, dies im Zusammenhang mit dem Namen etwa durch "bezüglich" auszudrücken.

von Kontrollprozessen die Vorhersehbarkeit vorausgesetzt werden. Als realitätsbezogene Rechtfertigung dafür läßt sich vielleicht eine zwischen Beobachtung und Reaktion bestehende Verzögerung anführen, die sich infinitesimal reduziert in der Weise auswirkt, daß eine Kontrolle nicht von der Gegenwart, sondern nur von der strikten Vergangenheit abhängt. Diese "infinitesimale Reduzierung" stellt jedoch eine solch starke Idealisierung dar, daß von vornherein der Unterschied zur Idealisierung, welche auch von der Gegenwart abhängige Kontrollen zuläßt, nicht als gravierend auffällt.

Die Tatsache, daß die in dieser Arbeit betrachteten Kontrollen "Intensitäten" sind, macht einen Verzicht auf die Voraussetzung der Vorhersehbarkeit möglich. Der Grund liegt darin, daß diese Intensitäten sozusagen erst in integrierter Form (und diese besitzt dann die Eigenschaft der Vorhersehbarkeit) auf den zukünftigen Systemverlauf einwirken (Siehe Abschnitt 2.).

1.3. Einiges zur Kontrolle dynamischer Systeme

Das Gebiet der stochastischen Kontrolle ist nicht so klar zu umreißen wie das der deterministischen Kontrolle.
Es umfaßt Teilgebiete wie etwa die Semi-Markov-Entscheidungstheorie und das optimale Stoppen, aber auch die Kontrolle stochastischer Differentialgleichungen.
Leider gibt es kein übergreifendes Modell, das in allgemeiner und befriedigender Weise die Steuerung stochastischer Prozesse beschreibt.
Die konkrete Beschreibung jedes Falles geschieht durch Festlegung der dynamischen Interdependenz von Zustand, Beobachtung und Steuerung, wie in folgendem Diagramm veranschaulicht:

Wir gehen von einer vollständigen Beobachtbarkeit aus, so daß sich obiges Diagramm reduziert auf:

Zustand $\longleftrightarrow$ Steuerung

Das Steuerungsproblem, das dieser Arbeit zugrundeliegt, soll nun in einen etwas allgemeineren Rahmen gestellt werden, der gewisse Wesenszüge besser zur Geltung bringt und indirekt eine Vorausschau auf das weitere Arbeitsprogramm zuläßt.

Dynamisch Steuern bedeutet, daß in jedem Zeitpunkt aufgrund der speziellen Vergangenheit durch eine Entscheidung Einfluß auf die Zukunft ausgeübt wird.

Für uns besteht ein steuerbares System aus

- einem dynamischen System $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$, dessen Geschichte von einem Zustandsprozeß erzeugt wird, d. h. es gibt einen Prozeß

  $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t$

  und dieser Prozeß heißt Zustandsprozeß des dynamischen Systems,

- einer Menge $\mathcal{U}$ von zulässigen Steuerungen, wobei eine Steuerung ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozeß

  $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist,

  und durch Zusatzbedingungen die Menge der Steuerungen auf die Menge der zulässigen Steuerungen eingeengt wird, etwa dadurch, daß u nur Werte in einem vorgegebenen sog. Steuerbereich $U \subset \mathbb{R}$ annehmen darf,

- einer eindeutigen Zuordnung einer Wahrscheinlichkeit P^u auf $(\Omega,\mathcal{F})$ zu jedem $u \in \mathcal{U}$. Dabei hat die Verträglichkeitsbedingung zu gelten:

  $P^u(A) = P^v(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}_t$, wenn

  $$u\big|_{[0,t]\times\Omega} = v\big|_{[0,t]\times\Omega} .$$

Nicht-Antizipativität von u und Verträglichkeitsbedingung sind Mindestanforderungen, wenn ein Bezug des Modells zur Realität bestehen soll.
Die Nicht-Antizipativität besagt eben, daß eine Steuerung (exakt: der Wert, den eine Steuerung in einem Zeitpunkt annehmen kann) nicht von zukünftigen (exakt: bezogen auf diesen Zeitpunkt) eventuell in Erscheinung tretenden Phänomenen abhängen kann.[1)]
Die Verträglichkeitsbedingung stellt sicher, daß zwei bis zum Zeitpunkt t übereinstimmende Steuerungen dieselbe Wahrscheinlichkeit auf $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ induzieren.

Auf ein Problem des optimalen Steuerns stößt man, wenn der Systemverlauf mit einer Kostenbewertung versehen wird:

$$C \;:\; \mathcal{U}\times\Omega \longrightarrow [0,\infty]$$

(mit der Eigenschaft, $C(u,.)$ sei für jedes $u\in\mathcal{U}$ eine P^u-integrierbare Zufallsvariable)
und die zulässigen Steuerungen mit

$$J(u) := \int_\Omega C(u,\omega)\, P^u(d\omega) =: E_u\, C(u,.)$$

bewertet werden.

Ist $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$, so heißt u_o <u>optimal in $\mathcal{U}'$</u>, wenn $u_o\in\mathcal{U}'$ und

$$J(u_o) = \min_{u\in\mathcal{U}'} J(u) \qquad \text{gilt.}$$

Das Problem des optimalen Steuerns besteht zunächst aus der Frage nach der Existenz in optimaler Steuerungen, der Angabe von notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen für die Optimalität, etc. Hat man eine interessante Unterklasse $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$, so interessiert man sich besonders dafür, ob in dieser Unterklasse optimale Steuerungen auch in der Klasse der zulässigen Steuerungen optimal sind.

---

1) Die "exakte" Sprechweise ist unüblich und meist unnötig. Vielfach wird ein Wert aus dem Steuerbereich U mit dem gleichen Buchstaben u bezeichnet wie ein Steuerprozeß.

Unser Augenmerk richtet sich in diesem Zusammenhang auf die Klasse $\mathcal{U}^M$ der Markov-Steuerungen:

$$\mathcal{U}^M := \{ u \in \mathcal{U} : u \text{ ist von der Gestalt } u(t,\omega) = u(t,X(t,\omega)) \}$$ [1)]

Markov-Steuerungen sind also solche zulässigen Steuerungen, die nur vom Zeitpunkt t und vom momentanen Zustand $X(t,\omega)$ abhängen.

Die große Bedeutung der Markov-Steuerungen liegt in deren Einfachheit: Man braucht nur die Zeit und den momentanen Zustand des Prozesses zu registrieren und nicht etwa dessen gesamte Vergangenheit. Allerdings ist dies erst dann von entscheidendem Vorteil, wenn man weiß, daß man keinen Optimalitätsverlust gegenüber einer etwaigen nicht-markovschen Steuerung erleidet.

Daß eine innerhalb der Markov-Steuerungen optimale Steuerung auch innerhalb aller zulässigen Steuerungen optimal ist, kann man nicht ohne weitere Annahmen erwarten.

In der Praxis ist die Gewinnung der Information, also die Registrierung der Vergangenheit des Zustandsprozesses, und deren Umsetzung ebenfalls mit Kosten verbunden. Eine dahingehende Modellerweiterung mit entsprechenden relevanten Ergebnissen scheint derzeit mathematisch nicht durchführbar. Deshalb kann es in der Praxis durchaus angebracht sein, von vornherein nur Markov-Steuerungen zuzulassen, auch wenn man dadurch einen Optimalitätsverlust (in einem die "Registrierungskosten" nicht berücksichtigenden Modell) erleidet.

---

1) Es ist üblich, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens den gleichen Funktionsbuchstaben u zu verwenden.

2. Warteprozesse als Geburts- und Todesprozesse mit von ihrer eigenen Vergangenheit abhängigen Geburts- und Todesintensitäten

2.1. Heuristische Vorbetrachtungen

Die Anzahl Q_t der sich in einem Zeitpunkt t in einem M/M/1-Wartesystem befindenden Einheiten läßt sich in ihrer zeitlichen Entwicklung als Markovscher Geburts- und Todesprozeß mit konstanten Geburts- und Todesintensitäten λ bzw. μ beschreiben.

Betrachten wir die uns im Hinblick auf unser Steuerungsproblem besonders interessierende Intensität μ . Es gilt:

$$(2.1)\quad P(Q_{t+h} - Q_t = -1 \mid Q_t) = \mu\, h + o(h) \quad \text{P-fast}$$

für $h \to 0$ und $Q_t \neq 0$.

Im Rahmen der Theorie der Markovschen Geburts- und Todesprozesse werden auch zeit- und zustandsabhängige Intensitäten zugelassen, an deren Wachstum man allerdings (im Zusammenhang mit der Existenzfrage) gewisse Beschränkungen zu stellen hat. Dabei ist es ungebräuchlich, in den auftretenden Intensitäten, etwa den Todesintensitäten $\mu_i(t)$, $i=0,1,2,\ldots$, bereits den stochastischen Prozeß $(t,\omega) \longmapsto \mu_{Q_t(\omega)}(t)$ zu sehen.

Unser Steuerungsproblem erfordert es jedoch, eine Abhängigkeit der Intensitäten von der gesamten Vergangenheit zuzulassen, so daß μ selbst als ein stochastischer Prozeß aufzufassen ist und Beziehung (2.1) formal ersetzt werden kann durch

$$(2.2)\quad P(Q_{t+h} - Q_t = -1 \mid \mathfrak{F}_t^Q) = \mu_t\, h + o(h) \quad \text{P-fast}$$

für $h \to 0$ und $Q_t \neq 0$.

Es ist klar, daß in (2.2) Meßbarkeits- und Regularitätsforderungen an den Prozeß μ gestellt werden müssen, um überhaupt die Existenz eines Prozesses (Q,P) zu gewährleisten, der diese Beziehung erfüllt. Auch erweist sich die Beziehung (2.2) zur Charakterisierung der Intensität als zu restriktiv.

Betrachtet man den Fall konstanter Intensitäten, so weiß man, daß die Intensität sich nicht nur über eine "lokale" Beziehung als "Grenzrate" wie in (2.1) charakterisieren läßt, sondern auch "global" über den Erwartungswert. In diesem Falle konstanter Intensitäten ist die Äquivalenz beider Vorgehensweisen trivial, ansonsten jedoch nicht.
Die zweite Vorgehensweise hat nun den Vorteil, daß sie sich unproblematischer verallgemeinern läßt.

Wenn wir von einem Wartesystem mit λ = const ausgehen, dessen Service-Intensität in Abhängigkeit von der Zeit und vom bisherigen Verlauf der Anzahl der sich im System befindenden Kunden beeinflußbar ist, so läßt sich das so steuerbare System nicht mehr mit der üblichen Symbolik X/Y/1 bezeichnen. Man könnte hier zwar, was die Zwischenankunftszeiten anbelangt, X = M schreiben, doch scheitert jeder Versuch für die Servicezeiten, deren Unabhängigkeit hier nicht gewährleistet ist. Sicherlich kann es Steuerungen geben, so daß das gesteuerte System ein M/M/1-System ist; man wähle etwa μ = const.

Solcherart steuerbare Wartesysteme werden durch die Zuordnung einer ganzen Klasse von stochastischen Warteprozessen (Q_t) beschrieben. Hierzu wird auf dem Trajektorienraum dieser Prozesse eine Klasse von Wahrscheinlichkeiten definiert.

2.2. Punktprozesse auf $\mathbb{R}_+$

Punktprozesse auf $\mathbb{R}_+$ bilden die Bausteine bei der Konstruktion von Warteprozessen: sie repräsentieren Input und Output eines Wartesystems.

Herausragende Beispiele sind in der deskriptiven Warteschlangentheorie durch die Erneuerungsprozesse, insbesondere Poissonprozesse (mit konstanter Intensität) gegeben. Sie dominieren dort, obwohl die Voraussetzung der Unabhängigkeit der Zwischenerneuerungszeiten oder die der Stationarität für praktische Erfordernisse oftmals zu restriktiv ist.

Punktprozesse können auch auf allgemeineren topologischen Räumen studiert werden, wobei der Begriff des zufälligen Masses stärker in den Vordergrund rückt.[1] Wir betrachten nur solche auf $\mathbb{R}_+$, ohne dies weiterhin hervorzuheben.

(2.3) Definition

Sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Meßraum. Ein Punktprozeß (auf $\mathbb{R}_+$) ist eine Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ von Zufallsvariablen

$$T_n : \Omega \longrightarrow (0,\infty]$$

mit $$T_n \leq T_{n+1}$$

und $$T_n(\omega) < T_{n+1}(\omega) \quad , \text{ falls } T_n(\omega) < \infty$$

und $$\lim_{n\to\infty} T_n = \infty \quad .$$

Wir setzen $T_0 := 0$.

Vielfach wird in der einschlägigen Literatur auf die Bedingung $\lim T_n = \infty$ verzichtet und obiger Punktprozeß als nicht-explosiv bezeichnet. Man beachte auch, daß im Endlichen keine multiplen Punkte gestattet sind. Allgemeinere Ansätze, die u. a. auch multiple Punkte zu-

---

1) Man hat dann ohne Ordnungsstruktur auszukommen, welche eine wesentliche Rolle in Def.(2.3) spielt.

lassen, sind für uns nicht von Bedeutung.

Ein Punktprozeß läßt sich mit dem ihm zugeordneten Zählprozeß

$$N : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}_+$$

$$N(t,\omega) = \sum_{n \geq 0} I(T_n(\omega) \leq t)$$

identifizieren.

Der allgemeine Intensitätsbegriff eines Punktprozesses bezieht sich auf eine Wahrscheinlichkeit P und eine Geschichte $(\mathcal{J}_t)$ von N beide auf $(\Omega,\mathcal{F})$ gegeben. Dabei ist für später wichtig, daß Geschichten $(\mathcal{F}_t)$ von N zugelassen sind, die echt größer als die minimale Geschicht $(\mathcal{F}_t^N)$ sind.

Von nun an sei ein Meßraum $(\Omega,\mathcal{F})$ und darauf ein Punktprozeß N, eine Wahrscheinlichkeit P und eine Geschichte $(\mathcal{F}_t)$ von N gegeben.

(2.4) Definition

Ein beschränkter[1] nicht-negativer meßbarer und $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozeß

$$\lambda : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt Intensität (deutlicher: $(P,\mathcal{F}_t)$-Intensität) des Punktprozesses N, wenn für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$ mit $s \leq t$ gilt:

$$E\,(\,N_t - N_s \,|\, \mathcal{F}_s\,) = E\,(\int_s^t \lambda_r \,dr \,|\, \mathcal{F}_s\,) \quad P\text{-fast.}$$

Für unser Problem genügt es, beschränkte Intensitäten zu betrachten. Daß wir dies sogleich in die Definition aufgenommen haben, hat technische Vorteile.

Ist λ nur von t abhängig (also deterministisch) und rechtsstetig, so ist offenbar $P(N_{t+h}-N_t \geq 1 \,|\, \mathcal{F}_t) = \lambda_t\, h + o(h)$ P-fast,

---

1) Als Funktion auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ beschränkt.

woraus die Ähnlichkeit zum herkömmlichen Intensitätsbegriff ersichtlich ist.
Leider läßt sich aus dem Bestehen solch einer Beziehung nicht diejenige in Definition (2.4) ableiten, und gerade diese läßt gewichtige Martingalmethoden zum Tragen kommen. Die Verbindung zu den Martingalen zeigt die nächste Behauptung (2.6).

Zuvor noch einige Anmerkungen:

Die Gleichung in Definition (2.4) ermöglicht es, wenn N eine Intensität λ besitzt, bei gewissen probabilistischen Überlegungen statt mit N mit folgendem "schöneren" Prozeß zu arbeiten:

$$\Lambda : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Lambda(t,\omega) := \int_0^t \lambda_r \, dr \quad .$$

Dieser auch als $(P,\mathcal{F}_t)$-Kompensator von N bezeichnete Prozeß ist $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert und vorhersehbar(da stetig) und ein steigender Prozeß in dem Sinne, daß $\Lambda(0,\omega)=0$ und $\Lambda(s,\omega) \leq \Lambda(t,\omega)$ für $s \leq t$.

Zu einem stoch. Punktprozeß (N,P) auf dem dynamischen System $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ mit $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t$ muß keine Intensität existieren. Existiert eine Intensität, so existiert trivialerweise auch der entsprechende Kompensator.
Allgemeinere Erörterungen gehen vom Begriff des Kompensators[1] aus: Ist dieser, als zufälliges Maß auf $\mathbb{R}_+$ betrachtet, absolutstetig bezüglich des Lebesgue- Masses (für jedes ω), so erhält man über den Satz von Radon-Nykodym die Intensität, wobei allerdings nicht wie in unserer Definition deren Beschränktheit Bedingung ist. Diese Vorgangsweise läßt dann auch Kompensatoren zu, die nicht notwendigerweise stetig sind.

Für uns steht jedoch der Intensitätsbegriff im Vordergrund. Außerdem interessiert uns nicht so sehr die Frage nach der Existenz von Intensitäten, sondern umgekehrt die der eines Prozesses zu vorgegebener Intensität. Eine recht allgemeine Erörterung findet man etwa bei LIPSTER/SHIYAYEV, Kapitel 18.

---

1) Dies ist dann ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter, vorhersehbarer steigender Prozeß, der die Beziehung in der Def. (2.4) anstelle des Integrals erfüllt.

Wir werden später einige Ergebnisse über zweiwertige Punktprozesse erarbeiten, aus denen man ohne Schwierigkeiten die analogen für Punktprozesse erhält.

(2.5) Beispiele

a) Nach einem Satz von Watanabe [1] ist ein Punktprozeß mit positiver konstanter Intensität $\lambda(t,\omega) \equiv \lambda$ ein Poissonprozeß mit Parameter λ .

b) Betrachten wir einen Erneuerungsprozeß, wobei $T_{n+1} - T_n$ die absolutstetige Verteilungsfunktion $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ besitzen möge mit $f/(1-F)$ beschränkt, dann hat dieser Prozeß die Intensität

$$\lambda(t,\omega) := f(\delta_t(\omega)) \;/\; [1 - F(\delta_t(\omega))]$$

wenn δ_t der Exzeß (Rückwärtsrekurrenzzeit) im Zeitpunkt t ist.

(2.6) Behauptung

Ein beschränkter nicht-negativer meßbarer und (J_t)-adaptierter Prozeß (λ_t) ist genau dann $(P,\mathcal{F}_t)$-Intensität von N, wenn $M = (M_t)$ mit

$$M_t := N_t - \int_0^t \lambda_s\,ds$$

ein $(P,\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

Beweis:

a) Ist M ein Martingal, so hat man $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ P-fast für $s \leq t$.
Da N und λ $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert (und damit $(\int_0^t \lambda_r dr)_{t \in \mathbb{R}_+}$ $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert) sind, folgt sofort die Gleichung in Def. (2.4).

b) Ist λ eine Intensität, so folgt unter Beachtung der Adaptiertheit der entsprechenden Prozesse sofort $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ P-fast für $s \leq t$. Somit ist nur noch

---

1) Siehe Çinlar, V, Satz 1.17.

die Integrierbarkeit von M_t zu zeigen. Aus der Gleichung in Def. (2.4) folgt $E\,N_t = E\int_0^t \lambda_s ds$ und damit erhält man $E\,M_t = 2\int_0^t \lambda_s ds < \infty$, da λ beschränkt. ▷

Betrachtet man die Schreibweise $N_t = \int_0^t \lambda_s\, ds + M_t$, so läßt sich M_t als eine Art "Störterm" interpretieren.

2.3. Paare von Punktprozessen auf $\mathbb{R}_+$, Warteprozesse

Sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Meßraum und A,D zwei Punktprozesse auf $\mathbb{R}_+$ mit $A \neq D$, dann nennen wir (A,D) ein Input-Output-Paar, wenn für alle $t \in \mathbb{R}_+$ $A_t - D_t \geq 0$ ist.

Einem solchen Input-Output-Paar läßt sich ein Prozeß Q durch

$$Q_t := A_t - D_t\,,\quad t \in \mathbb{R}_+$$

zuordnen.

Für die Trajektorien $Q(.,\omega), \omega \in \Omega$, dieses Prozesses

$$Q : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt:

(2.7) (i) $Q(0,\omega) = 0$, $Q(.,\omega) \geq 0$.

(ii) $Q(t,\omega) - Q(t-,\omega) = 0$ oder 1 oder -1 und in höchstens abzählbar vielen Zeitpunkten von 0 verschieden.

(iii) $Q(.,\omega)$ ist rechtsstetig.

(iv) Die Sprungstellen häufen sich nicht im Endlichen.

Betrachtet man einen W-Raum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ und darauf ein Input-Output-Paar (A,D) mit der Eigenschaft:

es gibt ein $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $P(\Omega_0) = 0$ und $\Omega_0 \supset \{\omega \in \Omega : \exists\, t \in \mathbb{R}_+ \ \Delta A_t = 1 = \Delta D_t$

so wird (A,D) im stochastischen Sinn durch Q repräsentiert, d. h. man kann fast sicher von Q auf A und D schließen und umgekehrt. A zählt einfach die Sprünge der Höhe +1 und D die der Höhe -1.

Wir werden nur solche stochastischen Wartesysteme untersuchen, weshalb wir von vornherein postulieren können, daß ein Eintritt nie zeitlich mit einem Austritt zusammenfällt. Dadurch befreit man die Formulierungen von unnötigem Ballast. Eine Rechtfertigung für dieses Postulat wird die Konstruktion stochastischer Warteprozessen liefern.

(2.8) Definition

Sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Meßraum. Einen Prozeß

$$Q : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

nennen wir Warteprozeß, wenn seine Trajektorien die Eigenschaften (2.7) erfüllen.

Einem Warteprozeß Q können folgende beiden Punktprozesse (sozusagen als Komponenten) zugeordnet werden:

$$Q^+(t,\omega) := \sum_{s \leq t} I(\Delta Q_s = 1)$$

$$Q^-(t,\omega) := \sum_{s \leq t} I(\Delta Q_s = -1) \quad .$$

Offenbar gilt $Q_t^+ \geq Q_t^-$ und $Q_t = Q_t^+ - Q_t^-$.

Aufgrund der Nichtgleichzeitigkeit von Ein- und Austritten repräsentiert (Q^+,Q^-) eindeutig Q und umgekehrt.

Ein Meßraum $(\Omega,\mathcal{F})$ und ein Warteprozeß Q auf diesem Meßraum erfüllen somit das Postulat der Nichtgleichzeitigkeit von Ein- und Austritten, wenn gilt:

(2.9) Ist (A,D) ein Input-Output-Paar auf $(\Omega,\mathcal{F})$ mit $A_t - D_t = Q_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, so folgt $A = Q^+$ und $D = Q^-$.

(2.10) Definition

Sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Meßraum und (Q,P) ein stochastischer Warteprozeß, wobei für $(\Omega,\mathcal{F})$ und Q die Bedingung (2.9) gelte.

a) Ein Prozeß $\lambda : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Input-Intensität von (Q,P), wenn λ $(P,\mathcal{F}_t^Q)$-Intensität des Punktprozesses Q^+ ist.

b) Ein Prozeß $\mu : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Service-Intensität von (Q,P), wenn der Prozeß $(\mu_t \, I(Q_t \neq 0))$ $(P,\mathcal{F}_t^Q)$-Intensität des Punktprozesses Q^- ist.

Die Unsymmetrie in obiger Definition liegt darin, daß Warteprozesse nicht-negativ sind. Es ist naheliegend $(\mu_t \, I(Q_t \neq 0))$ als Output-Intensität zu bezeichnen.

Von vorrangiger Bedeutung ist für uns jedoch die Service-Intensität, gerade im Hinblick auf in Optimierungsproblemen gegebene Kostenstrukturen.

Der aus der deskriptiven Warteschlangentheorie geläufige Begriff "Ankunftsintensität" spielt hier eine untergeordnete Rolle: Man denke an ein Wartesystem mit beschränktem Warteraum (K Plätze). Die Kunden mögen gemäß einem Poissonprozeß mit deterministischer Intensität λ' ankommen.
Dann teilt sich dieser Strom in Input und Overflow (Begrenzter Warteraum!). Man erhält als Input-Intensität

$$\lambda(t,\omega) = \lambda'(t) \, I(\, Q(t,\omega) \leq K \,) \, .$$

(2.11) Definition

a) Den Meßraum $(\Omega,\mathcal{F})$ nennen wir Basismeßraum der Warteprozesse, wenn

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{R}_+} : \omega = (\omega_t) \text{ erfüllt (als Funktion der Zeit) die Eigenschaften (2.7)}\}$$

und mit π_t als t-te Koordinatenprojektion von $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{R}_+}$ auf $\mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{F} = \sigma(\pi_t, t \in \mathbb{R}_+) .$$

b) Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)$ heißt natürliche Filtration des Basismeßraumes der Warteprozesse, wenn

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\pi_s, s \leq t) .$$

Für die natürliche Filtration $(\mathcal{F}_t)$ auf dem Basismeßraum $(\ ,\mathcal{F})$ der Warteprozesse gilt offensichlich

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty .$$

In kanonischer Weise ist $Q = (\pi_t)$ ein Warteprozeß auf dem Basismeßraum dem Basismeßraum der Warteprozesse; man hat $Q(t,\omega) = \pi_t(\omega) = \omega_t$.

Stochastische Warteprozesse (Q,P) auf dem Basismeßraum $(\Omega,\mathcal{F})$ der Warteprozesse lassen sich somit nur durch die Wahrscheinlichkeit P repräsentieren.

Der Basismeßraum der Warteprozesse ist offenbar der größte Trajektorienraum aller Warteprozesse. Auf ihm werden wir stochastische Warteprozesse, d. h. Wahrscheinlichkeiten, zu gegebenen Input- und Service-Intensitäten konstruieren.

$(\Omega,\mathcal{F})$ sei von nun an der Basismeßraum der Warteprozesse, und wir schreiben Q_t statt π_t . $(\mathcal{F}_t)$ sei seine natürliche Filtration. Ausnahmen werden ausdrücklich vermerkt.

Die Konstruktion stochastischer Warteprozesse erfordert eine Untersuchung der Struktur von $(\Omega,\mathcal{F})$.

Man sieht ohne weiteres ein, daß der Basismeßraum folgende wichtige Eigenschaft besitzt und in diesem Sinne als "reichhaltig" angesehen werden kann:

(2.12) Sei $T : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ eine Zufallsvariable. Dann ist mit jedem ω auch $(Q_{t\wedge T}(\omega))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Element von Ω .

Dadurch ist für jede Zufallsvariable[1] T der Stop-Operator

$$\alpha_T : \Omega \longrightarrow \Omega$$

vermöge $\quad Q_t(\alpha_T\omega) = Q_{t\wedge T}(\omega) \quad$ für alle $t\in\mathbb{R}_+$

wohldefiniert.

Die Einführung des Stop-Operators hat hier eine mehr technische Bedeutung (siehe auch SHIRYAYEV,1.2., was die allgemeine Bedeutung anbelangt).

Aus der impliziten Definition des Stop-Operators durch $Q_{t\wedge T} = Q_t \circ \alpha_T$ ist ersichtlich, daß α_T für jedes $t\in\mathbb{R}_+$ $\sigma(Q_{t\wedge T})$- $\sigma(Q_t)$-meßbar ist. Hieraus folgt die $\sigma(Q_{t\wedge T}, t\in\mathbb{R}_+)$-$\mathcal{F}$-Meßbarkeit des Stop-Operators.

Man beachte auch die Idempotenz des Stop-Operators; es gilt $\quad \alpha_T = \alpha_T \circ \alpha_T$.

Die intuitive Auffassung von Stopzeiten T und σ-Algebren $\mathcal{F}_T$ der T-Vergangenheit wird durch deren folgende Charakterisierung gerechtfertigt. Diese basiert jedoch nicht unwesentlich auf der speziellen Struktur von $(\Omega,\mathcal{F})$, insbesondere auf (2.12).

Es gilt gemäß D/M, IV Th 100, folgende Charakterisierung:

(2.13) a) Die Zufallsvariable $T:\Omega \longrightarrow [0,\infty]$ ist genau dann $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit, wenn für jedes $t\in\mathbb{R}_+$ gilt:

$$\big(T(\omega) \leq t \text{ und } \alpha_t\omega = \alpha_t\omega'\big) \Longleftrightarrow T(\omega) = T(\omega').$$

b) Für eine Stopzeit T und $A\subset\Omega$ hat man:

$$A \in \mathcal{F}_T \Longleftrightarrow \big(A \in \mathcal{F}_\infty \text{ und } \alpha_T^{-1}(A) = A\big) \quad .^{2)}$$

---

1) Es wird die Bezeichnung Stop-Operator verwendet, obwohl T nicht als Stopzeit vorausgesetzt wird.

2) Offensichtlich ist der Klammerausdruck äquivalent zu: $A\in\mathcal{F}_\infty$ und $\big(\omega\in A,\ \alpha_T\omega = \alpha_T\omega' \Longrightarrow \omega'\in A\big)$.

Damit läßt sich nun leicht folgende Behauptung beweisen.

(2.14) Behauptung

Für eine Stopzeit T auf dem Basismeßraum der Warteprozesse gilt

$$\mathcal{F}_T = \sigma(Q_{t\wedge T} , t\in \mathbb{R}_+) .$$

Beweis:

a) Sei $A\in\mathcal{F}_T$. Dann ist mit (2.13) $A\in\mathcal{F}$ und man hat $\alpha_T^{-1}(A)=A$.
Da α_T $\sigma(Q_{t\wedge T}, t\in\mathbb{R}_+) - \mathcal{F}$-meßbar ist, folgt
$A\in\sigma(Q_{t\wedge T}, t\in\mathbb{R}_+)$.

b) Umgekehrt genügt es zu zeigen, daß für jedes $Z\subset\mathbb{Z}_+$ und jedes $t\in\mathbb{R}_+$ $Q_{t\wedge T}^{-1}(Z)\in\mathcal{F}_T$.
Nun ist offenbar $Q_{t\wedge T}^{-1}(Z)\in\mathcal{F}_\infty$, da in der Abbildungskette
$\omega \longmapsto (t\wedge T(\omega),\omega) \longmapsto Q(t\wedge T(\omega),\omega)$ beide Abbildungen entsprechend meßbar sind.
Sei $\omega\in Q_{t\wedge T}^{-1}(Z)$ und $\omega'\in\Omega$ mit $\alpha_T\omega = \alpha_T\omega'$, so ist
$Q_{t\wedge T}(\omega) = Q_{t\wedge T}(\alpha_T\omega) = Q_{t\wedge T}(\alpha_T\omega') = Q_{t\wedge T}(\omega')$ und somit $\omega'\in Q_{t\wedge T}^{-1}(Z)$.
Mit (2.13) folgt die Behauptung. ▷

Ein wichtiges Beispiel einer Stopzeit auf $(\Omega,\mathcal{F})$ liefert der Zeitpunkt des n-ten Sprunges, $n\in\mathbb{N}$:

Wir setzen für $t\in\mathbb{R}_+$ $n_t := \sum_{s\le t} I(\Delta Q_s \neq 0)$,
d. h. n_t gibt die Anzahl der Sprünge bis (einschließlich) zum Zeitpunkt t an.
(n_t) ist offenbar ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozeß auf $(\Omega,\mathcal{F})$.

Für $n\in\mathbb{N}$ definieren wir nun

$$T_n : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$$

$$T_n(\omega) := \begin{cases} \inf\{t\in\mathbb{R}_+ : n_t(\omega)=n\}, & \text{falls Infimum existiert} \\ \infty & \text{, falls Infimum nicht existiert} \end{cases}$$

und $T_0 := 0$.

Es ist evident, daß $T_n(\omega)$ den Zeitpunkt des n-ten Sprunges der Trajektorie ω angibt und T_n tatsächlich eine $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit ist. Letzteres folgt mit der Adaptiertheit von (n_t) aus $\{T_n \leq t\} = \{n_t \geq n\}$ oder direkt aus (2.13).

Die nächsten beiden Lemmata spiegeln die fundamentale Rolle dieser Stopzeiten $(T_n)_{n\geq 0}$ wider.

(2.15) Lemma (Zerlegung von Stopzeiten auf dem natürlich filtrierten Basismeßraum der Warteprozesse)

Zu einer $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit auf $(\Omega,\mathcal{F})$ gibt es eine Folge $(\theta_n)_{n\geq 0}$ von $\mathcal{F}_{T_n}$-meßbaren Zufallsvariablen

$$\theta_n : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$$

so daß auf $\{ T_n \leq T < T_{n+1} \}$ T und θ_n übereinstimmen, was in der Form

$$T = \sum_{n\geq 0} I (T_n \leq T < T_{n+1}) \theta_n$$

geschrieben werden kann.

Beweis:

Sei T eine Stopzeit. Dann ist T $\mathcal{F}_T$-meßbar.

Nach (2.14) gilt $\mathcal{F}_T = \sigma(Q_{t\wedge T}, t\in\mathbb{R}_+)$.

Mit bekannten maßtheoretischen Hilfsmitteln zeigt man die Existenz einer abzählbaren Menge $H \subset \mathbb{R}_+$ und einer borelsch meßbaren Funktion

$$\theta : \mathbb{Z}_+^H \longrightarrow [0,\infty] ,$$

so daß für alle $\omega\in\Omega$ gilt

$$T(\omega) = \theta\left[\left(Q_{t\wedge T(\omega)}(\omega)\right)_{t\in H}\right] .$$

Dies geschieht so: Man zeigt zunächst, daß zu $A\in\mathcal{F}_T$

eine abzählbare Menge $H_A \subset \mathbb{R}_+$ existiert, so daß $A \in \sigma(Q_{s\wedge T}, s\in H_A)$. Dazu hat man nur nachzuweisen, daß die Klasse der $A\in\mathcal{F}_T$ mit dieser Eigenschaft eine σ-Algebra ist, und zu beachten, daß für alle $t\in\mathbb{R}_+$ $\sigma(Q_{t\wedge T})$ in dieser Klasse und diese andererseits in $\mathcal{F}_T$ enthalten ist. Setzt man $H := \bigcup_{q\in Q_+} H_{\{T=q\}}$, so ist man fertig. Man hat nur noch T zu faktorisieren.

Da auf der Menge $\{ T_n \leq T < T_{n+1}\}$ $\quad Q_{t\wedge T} = Q_{t\wedge T_n}$ ist, erhält man:

$$T = \sum_{n\geq 0} I(T_n=T<T_{n+1}) \quad \Theta\left[(Q_{t\wedge T_n})_{t\in H}\right] .$$

Mit $\Theta_n := \Theta\left[(Q_{t\wedge T_n})_{t\in H}\right]$ folgt die Behauptung. ▷

(2.16) Lemma (Zerlegung von wohlmeßbaren Prozessen auf dem natürlich filtrierten Basismeßraum der Warte-Prozesse)

Sei $\psi : \mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ein wohlmeßbarer Prozeß auf dem natürlich filtrierten Basismeßraum der Warteprozesse. Dann gibt es eine Folge $(\psi_n)_{n\geq 0}$ von $B(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}_{T_n}$-meßbaren Prozessen

$$\psi_n : \mathbb{R}_+\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

so daß auf $[\![T_n, T_{n+1}[\![$ ψ_n und ψ übereinstimmen, was in der Form

$$\psi = \sum_{n\geq 0} \psi_n \, \chi_{[\![T_n, T_{n+1}[\![}$$

geschrieben werden kann.

Beweis:

Die σ-Algebra $\mathcal{A}_w$ der wohlmeßbaren Mengen wird von den Prozessen $\chi_{[\![T,\infty[\![}$, T Stopzeit, erzeugt, siehe D/M , IV Th 64 c.

Für solche Prozesse gilt die Aussage des Lemmas, wie man mit Hilfe von Lemma (2.15) zeigt:

Sei nämlich T eine Stopzeit und (θ_n) die in Lemma (2.15) konstruierte Folge von $\mathcal{F}_{T_n}$-meßbaren Zufallsvariablen, so ist

$$\chi_{[\![T,\infty[\![} = \sum_{n\geq 0} \chi_{[\![\theta_n,\infty[\![} \chi_{[\![T_n,T_{n+1}[\![}$$

und $[\![\theta_n,\infty[\![\in B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_{T_n}$, da θ_n $\mathcal{F}_{T_n}$-meßbar ist.

Daß damit die Aussage des Lemmas für alle wohlmeßbaren Prozesse gilt, folgt mit einer Standardargumentation aus der "théorie générale", nämlich der einfachen Anwendung des bekannten Satzes über monotone Klassen, wie er in seiner auf Funktionen bezogenen Form bei D/M , I Th 21, zu finden ist.

Gemäß D/M, IV th 97 b, gilt:

(2.17) Jeder auf dem natürlich filtrierten Basismeßraum der Warteprozesse gegebene meßbare und adaptierte Prozeß ist auch wohlmeßbar.

Diese Aussage (2.17) ermöglicht uns die Anwendung des Lemmas (2.16) auf Intensitäten.

(2.18) Behauptung

Die natürliche Filtration auf dem Basismeßraum der Warteprozesse ist rechtsstetig.

Beweis:
Wir haben zu zeigen, daß $A\in\mathcal{F}_t$, wenn $A\in\mathcal{F}_s$ für alle $s>t$.
Anwendung von (2.13) ergibt:
Sei $A\in\mathcal{F}_s$ für alle $s>t$.
Sei $\omega\in A$, dann folgt aus $\alpha_s\omega = \alpha_s\omega'$ für alle $s>t$ wegen der Rechtsstetigkeit von ω und ω' : $\alpha_t\omega = \alpha_t\omega'$. Weiterhin ist $\omega'\in A$, da $A\in\mathcal{F}_s$. Somit folgt $A\in\mathcal{F}_t$.

2.4. Markierte Punktprozesse auf $\mathbb{R}_+$, insbesandere zweiwertige

Ähnlich wie Punktprozesse mit Zählprozessen identifiziert wurden, können umgekehrt Warteprozesse mit gewissen zweiwertigen Punktprozessen identifiziert werden. Die Einschränkung "gewisse" resultiert aus der Nichtnegativität der Warteprozesse.

Dieser Vorgang dient der Konstruktion von stochastischen Warteprozessen (durch eine Wahrscheinlichkeit auf dem Basismeßraum repräsentiert) ausgehend von einer Input- und einer Service-Intensität und ist insofern auf den ersten Blick nur von beweistechnischer Natur. Andererseits wird es aber erst dadurch möglich, die Konstruktion der globalen Dynamik (Wahrscheinlichkeit) aus der gegebenen lokalen Dynamik (Input- und Service-Intensität) in einer Art und Weise vorzunehmen, so daß eine der Warteschlangentheorie gemäße Interpretation möglich ist und die Verbindung zu den "herkömmlichen" Markovschen Warteprozessen erkennbar wird.

Punktprozesse und zweiwertige Punktprozesse sind spezielle markierte Punktprozesse.

(2.19) Definition

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ und $(E,\mathcal{E})$ zwei beliebige Meßräume und δ ein Extra-Punkt (nicht zu E gehörend).
Dann versteht man unter einem markierten Punktprozeß (auf $\mathbb{R}_+$ mit Markierungen in E)

eine Folge $(T_n,Y_n)_{n\geq 1}$ mit

(i) (T_n) ist Punktprozeß auf $\mathbb{R}_+$

(ii) $Y_n : \Omega \longrightarrow E\cup\{\delta\}$ ist $\mathcal{F}$-$(\mathcal{E} \vee\{\delta\})$-meßbar,
und $Y_n = \delta$ dann und nur dann, wenn $T_n = \infty$.

Wir setzen $T_o \equiv 0$.

Ist E eine endliche Menge der Mächtigkeit k, so nennt man den markierten Punktprozeß auch k-wertigen Punktprozeß. Insbesondere ist ein Punktprozeß als einwertiger Punktprozeß anzusehen.

Für uns sind nun die zweiwertigen Punktprozesse von Interesse: Ihre im Endlichen liegenden Punkte T_n haben zwei "Qualitäten", welche mittels zweier Marken gekennzeichnet werden.

Auf dem Basismeßraum der Warteprozesse ist in natürlicher Weise ein zweiwertiger Punktprozeß (T_n, Y_n) gegeben:

Wir setzen $E := \{1, -1\}$, $\mathcal{E} := \text{Pot } E$.

T_n sei der Zeitpunkt des n-ten Sprunges (siehe S. 27), $n \in \mathbb{N}$.

$Y_n := \Delta Q_{T_n}$.

Bezüglich der natürlichen Filtration des Basismeßraums gilt:

T_n ist Stopzeit (siehe S. 27) und Y_n ist $\mathcal{F}_{T_n}$-meßbar.

Letzteres erkennt man leicht mit (2.13).

Setzt man für $n \in \mathbb{N}$ $\tau_n := T_n - T_{n-1}$, so ist τ_n eine Zufallsvariable, und es gilt $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$.
Damit ist klar, daß man leicht aus (τ_n) die Folge (T_n) und umgekehrt erhält.

Mit obigem speziellem $(E, \mathcal{E})$ setzen wir

$$\tilde{E} := ((0,\infty) \times E) \cup \{(\infty, \delta)\} \quad ^{1)}$$
$$\tilde{\mathcal{E}} := (\mathcal{B}(0,\infty) \otimes \text{Pot } E) \vee \{(\infty, \delta)\}$$

Mit $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathcal{F})$ sei nun wieder der Basismeßraum der Warteprozesse mit seiner natürlichen Filtration fixiert. Wir definieren dazu zwei neue Meßräume, nämlich $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$:

---

1) $(0,\infty)$ ist ein offenes Intervall, (∞, δ) ist ein Paar

$$\tilde{\Omega} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{E}^{(n)} \qquad \text{, wobei } \tilde{E}^{(n)} = \tilde{E}$$

$$\tilde{\mathcal{F}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}^{(n)} \qquad \text{, wobei } \tilde{\mathcal{E}}^{(n)} = \tilde{\mathcal{E}}$$

$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ ist offensichtlich der kanonische Meßraum des Prozesses (τ_n,Y_n).[1)]

Wir bezeichnen mit $(\tilde{\tau}_n,\tilde{Y}_n)$ die n-te Koordinatenprojektion von $\tilde{\Omega}$ auf $\tilde{E}$; dann ist:

$$(\tau_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (\Omega) = \{\ \tilde{\omega}\in\tilde{\Omega} : \sum_{n\geq 1} \tilde{\tau}_n(\tilde{\omega}) = \infty\ ,\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_n(\tilde{\omega}) \geq 0 \text{ für alle } n\in\mathbb{N}\ \}$$

$$=: \Omega'$$

Ω' ist das Bild von Ω unter der Abbildung $(\tau_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Diese Abbildung ist injektiv, da man zu $\omega'\in\Omega'$ eindeutig das dazugehörige $\omega\in\Omega$ durch

$$\omega_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{Y}_n(\omega')\ \ I\ (\ \tilde{\tau}_n(\omega') \leq t\ )\ ,\ t\in\mathbb{R}_+\text{, erhält.}$$

Nun sei $\mathcal{F}' := \Omega' \cap \tilde{\mathcal{F}}$.

Es ist evident, daß die beiden Meßräume $(\Omega,\mathcal{F})$ und $(\Omega',\mathcal{F}')$ isomorph sind. Man beachte, daß sogar $\Omega'\in\tilde{\mathcal{F}}$ gilt.

Damit ist klar, daß mit einer Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}$ auf $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ mit $\tilde{P}(\Omega') = 1$ eine Wahrscheinlichkeit auf $(\Omega,\mathcal{F})$ gegeben ist.

---

1) (τ_n,Y_n) ist kein zweiwertiger Punktprozeß. Er ist aber arbeitstechnisch dem Prozeß (T_n,Y_n) vorzuziehen, der mit ihm in eineindeutiger Beziehung steht.

2.5. Kostruktion stochastischer Warteprozesse bei gegebener Input-und Service-Intensität

Die spezielle Gestalt von $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ als Produkt abzählbar vieler Meßräume ermöglicht nun die Anwendung des Satzes von Ionescu Tulcea, siehe etwa NEVEU,p.194 , der die Konstruierbarkeit von Wahrscheinlichkeiten darauf aus einer Anfangsverteilung und Übergangswahrscheinlichkeiten garantiert.

Wir machen zunächst einige heuristische Überlegungen:

Es sei ein Wartesystem betrachtet. Wir befinden uns im Zeitpunkt $T_o:=0$. Mit u_1 bezeichnen wir die Zeitspanne bis zur Ankunft des ersten Kunden. Diese sei verteilt gemäß

$$P(\, u_1>t\,) = \exp(-\int_o^t \lambda_o(s)ds) \quad , \qquad 1)$$

wobei λ_o eine nicht-negative meßbare Funktion der Zeit ist.

Ist der erste Kunde im Zeitpunkt $T_1 > 0$ angekommen, so wird sofort eine Zeitspanne u_2 (Zeitspanne vom Zeitpunkt T_1 bis zur Ankunft des zweiten Kunden) und eine Zeitspanne v_2 (Zeitspanne vom Zeitpunkt T_1 bis zur Beendigung des Services des ersten Kunden) unabhängig und verteilt gemäß

$$P(\, u_2>t\,) = \exp(-\int_{T_1}^{T_1+t} \lambda_{T_1}(s)ds) \quad ,$$

$$P(\, v_2>t\,) = \exp(-\int_{T_1}^{T_1+t} \mu_{T_1}(s)ds)$$

gewählt, wobei λ_{T_1} und μ_{T_1} zwei von T_1 abhängige nicht-negative meßbare Funktionen der Zeit sind.

Als Zeitpunkt, in welchem sich obiger Vorgang wiederholt gelte

$$\begin{aligned} T_2 &= \min(T_1+u_2, T_1+v_2) \\ &= T_1 + \min(u_2, v_2) \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{u_2=v_2\}$ Null ist.

---

1) Man interpretiere u_1 als eine "Lebensdauer" mit "Mortalitätsrate" $\lambda_o(s)$.

Wir setzen $\mu_0 = 0$ und $v_1 = \infty$, so daß sich der erste Schritt formal dem Gesamtgefüge anpaßt.

Notieren wir $Y_2 = 1$ bzw. -1, je nachdem ob $u_2 < v_2$ oder $v_2 > u_2$ ($u_2 = v_2$ kann außerachtgelassen werden), so mögen bei der Wiederholung obigen Vorganges im Zeitpunkt T_2 die entsprechenden Funktionen $\lambda(.)$ und $\mu(.)$ von T_1, Y_1, T_2 und Y_2 abhängen[1].

Man denke sich die beiden Vorgänge entsprechend fortgesetzt.

Obiges Schema ist zwar eine Verallgemeinerung des Schemas zur Konstruktion Markovscher Geburts- und Todesprozesses, wie es etwa bei ÇINLAR, p. 271 , für nur vom Zustand aber nicht von der Zeit abhängige Intensitäten zu finden ist, doch es erscheint im Hinblick auf unsere Gegebenheiten noch zu speziell zu sein, zumindest auf den ersten Blick. Denn zum einen Male wirkt die Verteilung der Zeitspannen u_i, v_i sehr speziell und zum anderen Male ist man sich nicht ganz sicher, ob man mit der Abhängigkeit der Intensitäten von $T_1, Y_1, T_2, Y_2, \ldots, T_i, Y_i$ [2] (man erkennt bereits den Bezug zu den zweiwertigen Punktprozessen) auch wirklich den allgemeinsten Fall erfaßt hat.

Wir werden zeigen, daß obiges Schema doch den allgemeinsten Fall beschreibt. Intuitiv gesehen, kann ja eine von der Vergangenheit des Prozesses abhängige Intensität zwischen den zufälligen Zeitpunkten T_n und T_{n+1} nur von der Vergangenheit und der seither verstrichenen Zeit abhängen und diese Vergangenheit wird eben durch die Zeitpunkte der bisher erfolgten Sprünge und Notierung deren Qualität angegeben.
Die rigorose Formulierung ist jedoch nicht trivial; die Erfahrung mit stochastischen Prozessen hat gezeigt, daß man mit zufälligen Zeitpunkten nicht vorschnell so wie mit festen umgehen kann.

---

1) Es ist stets $Y_1 = 1$.

2) Wir werden später wieder $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ verwenden. Es ist klar, daß $\tau_1, Y_1, \tau_2, Y_2, \ldots, \tau_i, Y_i$ dieselbe Abhängigkeit bedeutet.

Das Auftreten der Exponentialfunktion in den obigen Betrachtungen ist plausibel, wenn man an die natürliche Verbindung zwischen "Ausfallraten" und "Lebensdauerverteilungen" denkt. Da nicht-konstante Integranden zugelassen sind, ist dieser Ansatz von recht allgemeiner Natur. Nur die konstanten Integranden führen zur speziellen Klasse der Exponentialverteilungen.

(2.20) Satz

Auf dem Basismeßraum der Warteprozesse mit seiner natürlichen Filtration seien zwei beschränkte nicht-negative meßbare und adaptierte Prozesse λ und μ gegeben.

Dann gibt es genau einen stochastischen Warteprozeß (Q,P), der λ als Input-Intensität und μ als Service-Intensität hat.

Beweis:

Wir erinnern an die Betrachtungen und Bezeichnungen im Abschnitt 2.4., insbesondere an die Isomorphie von $(\Omega,\mathcal{F})$ und $(\Omega',\mathcal{F}')$.

Wir werden jedoch die Kostruktion von P auf dem Meßraum $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ vornehmen (hierbei wird diese Wahrscheinlichkeit zunächst als $\tilde{P}$ bezeichnet) und anschließend den Nachweis von $\tilde{P}(\Omega') = 1$ erbringen.

1. Zunächst zeigen wir, daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{F}_{T_n} = \sigma\left((\tau_i, Y_i) \,,\, i \leq n \right) .$$

Dies ergibt sich aus (2.13), man hat nur

$$\alpha_{T_n}\omega = \alpha_{T_n}\omega' \quad \text{und} \quad (\tau_i,Y_i)(\omega) = (\tau_i,Y_i)(\omega') \quad \text{für } i \leq n$$

zu berücksichtigen.

Man beachte $\mathcal{F}_{T_0} = \mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$.

2. Seien nun λ und μ zwei beschränkte nicht-negative meßbare Prozesse auf dem natürlich filtrierten Basismeßraum. Wegen (2.17) folgt mit Lemma (2.16) die Existenz zweier Folgen

$$(\lambda^{(n)})_{n\geq 0} \quad \text{und} \quad (\mu^{(n)})_{n\geq 0}$$

von $B(\mathbb{R}_+)\otimes \mathcal{F}_{T_n}$-meßbaren Prozessen, die auf dem stochastischen Intervall $[\![T_n, T_{n+1} [\![$ mit λ bzw. μ übereinstimmen.

Gemäß dem im 1. Beweisschritt Gezeigten kann man

$$\lambda^{(n)}(t,.) = \lambda\left(\begin{matrix}(n)\\ \tau_i, Y_i\end{matrix}\right)_{i=n}(t) \qquad 1)$$

schreiben und $\mu^{(n)}(t,.)$ analog.

Da $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, sind $\lambda^{(0)}$ und $\mu^{(0)}$ nur Funktionen der Zeit.

Ebenfalls mit Hilfe des 1. Beweisschrittes erkennt man die Einbettbarkeit von

$$(\alpha_{T_n}\Omega,\ \mathcal{F}_{T_n}) \quad \text{in} \quad \Big(\prod_{n=1}^{n}\tilde{E}^{(i)},\ \bigotimes_{n=1}^{n}\tilde{\mathcal{E}}^{(i)}\Big)$$

entsprechend der von $(\Omega,\mathcal{F})$ in $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$.

3. Für $n\in\mathbb{N}$ bezeichne $\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit (zwecks Einfachheit nur als Verteilung geschrieben) von $\Big(\prod_{i=1}^{n}\tilde{E}^{(i)},\ \bigotimes_{i=1}^{n}\tilde{\mathcal{E}}^{(i)}\Big)$ nach $(\tilde{E}^{(n+1)},\tilde{\mathcal{E}}^{(n+1)})$.

Eine solche ist offenbar festgelegt durch Spezifikation von

$\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{\tau}_{n+1}\leq t, \tilde{Y}_{n+1}=1)$ und $\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tau_{n+1}\leq t, \tilde{Y}_{n+1}=-1)$

für $t\ \mathbb{R}_+$,

$\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{\tau}_{n+1}=\infty, \tilde{Y}_{n+1}=\delta)$ ergibt sich dann in konsistenter Weise.

---

1) D. h. wir können davon ausgehen, daß $\lambda^{(n)}$ in dieser Form geschrieben werden kann. Korrekterweise müßte λ rechts durch einen anderen Buchstaben ersetzt werden.

Dies erreicht man nun durch

$$\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{\tau}_{n+1} > t) :=$$

$$\exp\left(- \int_{T_n}^{T_{n+1}} \left[\lambda^{(n)}_{(\tilde{\tau}_i,\tilde{Y}_i)_{i=n}}(s) + \mu^{(n)}_{(\tilde{\tau}_i,\tilde{Y}_i)_{i=n}}(s)\, I\Big(\sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i > 0\Big) \right] ds \right),$$

$$\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{Y}_{n+1}=1 \,\big|\, \tilde{\tau}_{n+1}=t) :=$$

$$\frac{\lambda^{(n)}_{(\tilde{\tau}_i,\tilde{Y}_i)_{i=n}}(T_n+t)}{\lambda^{(n)}_{(\tilde{\tau}_i,\tilde{Y}_i)i=n}(T_n+t) \;+\; \mu^{(n)}_{(\tilde{\tau}_i,\tilde{Y}_i)_{i=n}}(T_n+t)\, I\Big(\sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i > 0\Big)}$$

Im Falle $\tilde{Y}_{n+1}=-1$ steht der zweite Summand des Nenners im Zähler.

Die Analogie zur Konstruktion Markovscher Sprungprozesse ist unverkennbar, man siehe BREIMAN, p. 333.

Man hat (nur für $\tilde{Y}_{n+1}=1$ aufgeführt, $\tilde{Y}_{n+1}=-1$ entsprechend)

$$\tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{\tau}_{n+1}>t, \tilde{Y}_{n+1}=1)$$

$$= \int_t^{\infty} \tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{Y}_{n+1}=1 \,\big|\, \tilde{\tau}_{n+1}=s)\; \tilde{P}^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(ds)$$

$$= P^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(\tilde{\tau}_{n+1}>t \,\big|\, Y_{n+1}=1)\;\; P^{1,2,\ldots,n}_{n+1}(Y_{n+1}=1)$$

Die letzte Zeile bringt gerade die in den heuristischen Vorbetrachtungen dargelegte Interpretation, wie sie für die Warteschlangentheorie angebracht ist.

Setzt man in den auf der letzten Seite obenstehenden Beziehungen formal $n=0$, so erhält man eine Anfangsverteilung $\tilde{P}_1$ auf $(\tilde{E},\tilde{\mathcal{E}})$; man hat nur zu beachten, daß $\lambda^{(0)}$ und $\mu^{(0)}$ nur von der Zeit abhängen und eine Summation von i=1 bis i=0 formal stets Null liefert.

Der Satz von Ionescu Tulcea, NEVEU, p.194, besagt nun, daß es auf $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ genau eine Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}$ gibt, so daß gilt:

Für jedes meßbare Rechteck $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{F}_n$, d. h. $\tilde{F}_n \in \tilde{\mathcal{E}}^{(n)}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\tilde{F}_n = \tilde{E}$ für n größer einem gewissen $n_o \in \mathbb{N}$, hat man

$$\tilde{P}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \int_{F_1} \tilde{P}_1(d\tilde{\omega}_1) \int_{F_2} \tilde{P}_2^1(d\tilde{\omega}_2) \dots \int_{F_{n_o}} \tilde{P}_{n_o}^{1,2,\dots,n_o-1}(d\tilde{\omega}_{n_o}),$$

hierbei bezeichne $\tilde{\omega}_n = (\tilde{\tau}_n, \tilde{Y}_n)$.

4. Dies wird sogleich angewandt, um $\tilde{P}(\Omega') = 1$ zu zeigen.

$$\Omega'^c = \{\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}: \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau}_n < \infty\} \cap \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i < 0\} \Big)$$

Aufgrund der Konstruktion (man beachte die als Faktor bei der Service-Intensität stehende Indikatorfunktion) gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i < 0 \Big) = 0.$$

Aus der Beschränktheit von λ und μ folgt $\tilde{P}(\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau}_n < \infty) = 0$:

Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\tilde{P}(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\tau}_i \leq t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i \leq t) \quad .$$

Da λ und μ beschränkt sind, gibt es $\gamma > 0$, so daß

mit Beachtung von

$$\tilde{P}_i^{1,2,\ldots,i-1}(\tilde{\tau}_i \leq t) =$$

$$\tilde{P}_i^{1,2,\ldots,i-1}(\tilde{\tau}_i \leq t, \tilde{Y}_i = 1)$$

$$+ \quad \tilde{P}_i^{1,2,\ldots,i-1}(\tilde{\tau}_i \leq t, \tilde{Y}_i = -1)$$

gilt:

$$\tilde{P}_i^{1,2,\ldots,i-1}(dt_i) \leq 2\gamma\, e^{-\gamma t_i}\, dt_i \, .$$

Mit dem Satz von Ionescu Tulcea erhält man

$$\tilde{P}(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i \leq t) =$$

$$\int_0^t \tilde{P}_1(dt_1) \int_0^{t-t_1} \tilde{P}_2^1(dt_2) \int_0^{t-t_1-t_2} \tilde{P}_3^{1,2}(dt_3) \ldots \int_0^{t-\sum_{i=1}^{n-1}} \tilde{P}_n^{1,\ldots,n-1}(dt_n)$$

$$\leq \quad 2^n \gamma^n \, (t^n / n!) \quad ;$$

bei der Abschätzung beachte man $e^{-\gamma t_i} \leq 1$ und
(was mit vollständiger Induktion leicht zu zeigen ist)

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t-t_1-t_2-\ldots t_{n-1}} dt_n = t^n / n! \quad .$$

Nun gilt mit $\gamma' := 2\gamma t$ $\lim_{n\to\infty} (\gamma'^n / n!) = 0$,

womit man fertig ist.

5. Im vorletzten Beweisschritt ist zu zeigen, daß λ und μ tatsächlich Input-Intensität und Service-Intensität des soeben konstruierten Warteprozesses (Q,P) sind.

Wir führen den Nachweis nur für die Input-Intensität durch, da er für die Service-Intensität vollkommen analog verläuft.

Nach Anhang 1 genügt es, wenn wir für jede endliche Stopzeit T und jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen, daß gilt:

$$E\ Q^+_{T\wedge T_n} = E \int_0^{T\wedge T_n} \lambda_s\, ds \quad .$$

Sei T eine endliche Stopzeit und $n \in \mathbb{N}$.
Die Zerlegung von λ nach Lemma (2.16) ergibt

$$E \int_0^{T\wedge T_n} \lambda_s\, ds = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} I(T_i \leq T) \int_{T_i}^{T\wedge T_{i+1}} \lambda_s^{(i)}\, ds \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E\left(I(T_i \leq T)\, E\Big(\int_{T_i}^{T\wedge T_{i+1}} \lambda_s^{(i)}\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_{T_i} \Big) \right) \quad 1)$$

Sei nun (Θ_i) die Zerlegung der Stopzeit T gemäß Lemma (2.15).

Dann gilt, wenn $P_{T_{i+1}}(dr \mid \mathcal{F}_{T_i})$ die bedingte Verteilung 2) von T_{i+1} unter $\mathcal{F}_{T_i}$ bezeichnet :

$$E\left(I(T_i \leq T)\, E\Big(\int_{T_i}^{T\wedge T_{i+1}} \lambda_s^{(i)}\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_{T_i} \Big) \right) =$$

---

1) Es ist $\{T_i \leq T\} \in \mathcal{F}_{T_i}$, siehe D/M , IV th 56 .

2) Eine reguläre Version existiert stets.

$$= E\left(I(T_i \leq T) \int_{T_i}^{\Theta_i} \int_{T_i}^{r} \lambda_s^{(i)} ds \; P_{T_{i+1}}(dr \mid \mathcal{F}_{T_i}) + \int_{\Theta_i}^{\infty} \int_{T_i}^{\Theta_i} \lambda_s^{(i)} ds \; P_{T_{i+1}}(dr \mid \mathcal{F}_{T_i}) \right)$$

$$= E\left(I(T_i \leq T) \int_{T_i}^{\Theta_i} \lambda_s^{(i)} \int_{s}^{\Theta_i} P_{T_{i+1}}(dr \mid \mathcal{F}_{T_i}) \, ds + P(T_{i+1} > \Theta_i \mid \mathcal{F}_{T_i}) \int_{T_i}^{\Theta_i} \lambda_s^{(i)} ds \right)$$

$$= E\left(I(T_i \leq T) \int_{T_i}^{\Theta_i} \lambda_s^{(i)} \left[P(s < T_{i+1} \leq \Theta_i \mid \mathcal{F}_{T_i}) + P(T_{i+1} > \Theta_i \mid \mathcal{F}_{T_i}) \right] \right.$$

$$= E\left(I(T_i \leq T) \int_{T_i}^{\Theta_i} \lambda_s^{(i)} P(T_{i+1} > s \mid \mathcal{F}_{T_i}) \, ds \right)$$

$$= E\left(I(T_i \leq T) \; P(T_{i+1} \leq \Theta_i, Y_{i+1} = 1 \mid \mathcal{F}_{T_i}) \right)$$

$$= E\left(I(T_i \leq T) \; E(Q^+_{\Theta_i \wedge T_{i+1}} - Q^+_{\Theta_i \wedge T_i} \mid \mathcal{F}_{T_i}) \right)$$

$$= E\left(Q^+_{T \wedge T_{i+1}} - Q^+_{T \wedge T_i} \right)$$

Die Summation von i=0 bis i=n-1 liefert das Ergebnis, wenn $Q^+_{T_0} = 0$ berücksichtigt wird.

6. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit der konstruierten Wahrscheinlichkeit.

Sei $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ der natürlich filtrierte Basismeßraum der Warteprozesse und P (irgendeine) Wahrscheinlichkeit auf $(\Omega,\mathcal{F})$, so daß (Q,P) die gegebenen Prozesse λ und μ als Input- bzw. Service-Intensität hat.

Es ist technisch nötig, obiges dynamisches System zu vervollständigen bezüglich P, so daß die "conditions habituelles" in eingangs zitierter Literatur erfüllt sind:
D. h. wir gehen o.B.d.A. davon aus, daß gilt:

$\mathcal{F}_0$ enthält alle P-Nullmengen.

Die Rechtsstetigkeit von $(\mathcal{F}_t)$ (siehe (2.18)) wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Die Anwendung des Stopsatzes für Martingale, M IV T 13, mit den Stopzeiten T_i, $t\wedge T_{i+1}$ für $t \geq T_i$ ergibt [1]

$$E\left(Q^+_{t\wedge T_{i+1}} - Q^+_{T_i} \mid \mathcal{F}_{T_i} \right) = E\left(\int_{T_i}^{t\wedge T_{i+1}} \lambda^{(i)}_s \, ds \mid \mathcal{F}_{T_i} \right)$$

und Entsprechendes für die Service-Intensität.

Wie im 5. Beweisschritt erhält man daraus

$$P\left(T_{i+1}=t, Y_{i+1}=1 \mid \mathcal{F}_{T_i} \right) = \int_{T_i}^{t} \lambda^{(i)}_s \, P\left(T_{i+1} > s \mid \mathcal{F}_{T_i} \right) ds$$

und entsprechendes für die Service-Intensität.

Für $\omega\in\Omega$ sind obige Übergangswahrscheinlichkeiten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\left(T_i(\omega),\infty \right)$ bzw. $\left[T_i(\omega),\infty \right)$, wobei zu beachten ist, daß $T_i(\omega)$ mit der Masse Null belegt wird.

Dadurch sind jedoch die Intensitäten aus obigen Beziehungen charakterisierbar:

---

1) Man beachte, daß das mit $t\wedge T_{i+1}$ gestoppte Martingal $\left(Q^+_r - \int_0^r \lambda_u \, du\right)_{r\in\mathbb{R}_+}$ gleichmäßig integrierbar ist.

Da

$$P(T_{i+1}\leq t \mid \mathcal{F}_{T_i}) = P(T_{i+1}\leq t, Y_{i+1}= 1 \mid \mathcal{F}_{T_i}) + P(T_{i+1}\leq t, Y_{i+1}=-1 \mid \mathcal{F}_{T_i})$$

P-fast,

erhält man durch Differentiation für Lebesgue-fast alle $t \geq T_i(\omega)$

$$\lambda^{(i)}(t,\omega) + \mu^{(i)}(t,\omega)\ I(Q_t(\omega)\neq 0) = \frac{\frac{d}{dt} F_\omega^{i+1}(t)}{1 - F_\omega^{i+1}(t)}$$

mit der Verteilungsfunktion

$$F_\omega^{i+1}(t) = P(\ T_{i+1}\leq t \mid (Q_t(\omega))_{t\leq T_i(\omega)}\ )$$

auf $[\ T_i(\omega), \infty)$.

Daß diese Verteilungsfunktion eine Dichte besitzt, ist bereits aus der auf der vorangehenden Seite abgeleiteten Beziehung ersichtlich.

Mit Beachtung der "Anfangsbedingung" $F_\omega^{i+1}(T_i(\omega)) = 0$ liefert die Integration die eindeutige Lösung

$$F_\omega^{i+1}(t) = 1 - \exp\left(-\int_{T_i(\omega)}^{t} \left[\lambda^{(i)}(t,\omega) + \mu^{(i)}(t,\omega) I(Q_t(\omega)=0)\right] ds\right)$$

Die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man hieraus und aus der auf der letzten Seite abgeleiteten Beziehung ohne Schwierigkeiten.

Alle Übergangswahrscheinlichkeiten sind mit den in der Konstruktion verwendeten identisch, und da der Satz von Ionescu Tulcea die Wahrscheinlichkeit P in eindeutiger Weise aus den Übergangswahrscheinlichkeiten liefert, sind wir fertig. ▷

(2.21) Bemerkung

Aus dem 6. Beweisschritt des Satzes (2.20) läßt sich ohne weiteres die Richtigkeit des Beispiels (2.5 b) erkennen.

Es ist nämlich $\quad F_\omega^{i+1}(t) = F(\delta_t(\omega))$.

Wir haben bereits vermerkt, daß entsprechende Ergebnisse, wie wir sie für zweiwertige Punktprozesse(bzw. Warteprozesse) abgeleitet haben, selbstverständlich auch für Punktprozesse in nahezu gleiche, ja sogar einfacherer Weise zu erhalten sind. Speziell für dieses Beispiel kann man im 6. Beweisschritt auch einfach $\mu = 0$ setzen.

Wegen Satz (2.20) ist es sinnvoll, von vornherein einen beschränkten nicht-negativen meßbaren und adaptierten Prozeß auf dem Basismeßraum der Warteprozesse als Intensitätsprozeß zu bezeichnen und die einem Paar (λ,μ) von Intensitätsprozessen eindeutig zugeordnete Wahrscheinlichkeit mit $P^{(\lambda,\mu)}$.

Die Intensitätsprozesse sind zunächst nur Prozesse im strengen Sinn und werden erst durch die von ihnen gemäß Satz (2.20) induzierten Wahrscheinlichkeiten zu stochastischen Prozessen.

Uns interessieren im weiteren nur die intensitätserzeugten Warteprozesse, d. h. jene Warteprozesse (Q,P), zu denen Intensitätsprozesse λ und μ existieren, so daß gilt $P = P^{(\lambda,\mu)}$. Damit sind etwa von vornherein Warteprozesse (Q,P) außer Betracht, für welche die Verteilung der n-ten Sprungzeiten nicht dissipativ ist, d. h. ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $t \in \mathbb{R}_+$ existieren mit $P(T_n=t) > 0$.

Leider würde uns eine Erörterung weiterer interessanter (deskriptiver) Tatsachen im Zusammenhang mit dem allgemeinen Warteprozeß-Begriff zu weit vom eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit wegführen. Insbesondere betrifft dies Themenkreise wie (stichwortartig aufgeführt) die Eigenschaft "totalement inaccessible" von obigen Stopzeiten T_n (siehe D/M,IV,79), die Absolutstetigkeit von W-Maßen auf dem Basismeßraum der Warteprozesse und die Existenz dominierender W-Maße innerhalb der intensitätserzeugten (Warteprozesse als Transformierte vom Girsanov'schen Typ) (siehe JACOD und LIPSTER/SHIRYAYEV,19.2).

3. Zustandswahrscheinlichkeiten intensitätserzeugter Warteprozesse

3.1. System der Zustandsgleichungen

Sei $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F})$ der natürlich filtrierte Basismeßraum der Warteprozesse. λ und μ seien zwei Intensitätsprozesse und (Q,P) der nach Satz (2.20) eindeutig bestimmte Warteprozeß.

Somit ist auch die Existenz der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p_n(t) := P\,(\,Q_t = n\,)$$

für $t \in \mathbb{R}_+$ und $n = 0,1,2,\ldots$ gesichert, deren Bestimmung wir uns nun widmen werden.

Der erste Schritt besteht im Aufstellen von "Bilanz-Gleichungen":

Diese "Bilanz" erfolgt im Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ und bezieht sich auf die Differenz zwischen der Anzahl der Sprünge in den momentanen Zustand Q_t und der Anzahl der Sprünge aus ihm heraus, die seit dem Zeitpunkt 0 erfolgt sind.
Da wir die Anfangsbedingung $Q_o = 0$ haben, ist offenkundig, daß wir im Zeitpunkt $t > 0$ nur dann den Zustand $Q_t = n \geq 1$ vorliegen haben können, wenn bisher ein Sprung mehr in den Zustand $Q_t = n$ erfolgte als aus ihm heraus, und nur dann den Zustand $Q_t = 0$, wenn bisher genau soviele Sprünge in den Zustand $Q_t = 0$, wie aus ihm heraus stattfanden.

Demnach erhalten wir:

Fall $n \geq 1$

$$Q_t = n \iff \sum_{o<s\leq t} I(Q_{s-}=n-1)\,\Delta Q_s^+ \;+\; \sum_{o<s\leq t} I(Q_{s-}=n+1)\,\Delta Q_s^-$$

$$- \sum_{o<s\leq t} I(Q_{s-}=n)\,\Delta Q_s^+ \;-\; \sum_{o<s\leq t} I(Q_{s-}=n)\,\Delta Q_s^-$$

$$= 1$$

Fall $n = 0$

$$Q_t = 0 \iff \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=0)\,\Delta Q_s^+ - \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=1)\,\Delta Q_s^- = 0$$

Andererseits ist klar, daß im Zeitpunkt $t>0$ $Q_t \neq n$ im Falle $n \geq 1$ genau dann gilt, wenn bisher genau soviele Sprünge in den Zustand wie aus ihm heraus, und im Falle $n = 0$ einer mehr in den Zustand wie aus ihm heraus erfolgten.

Daraus ergibt sich das Gleichnungssystem [1)]

$$I(Q_t=0) = 1 - \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=0)\,\Delta Q_s^+ + \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=1)\,\Delta Q_s^-$$

und für $n\geq 1$

$$I(Q_t=n) = \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=n-1)\,\Delta Q_s^+ + \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=n+1)\,\Delta Q_s^- - \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=n)\,\Delta Q_s^+ - \sum_{0<s\le t} I(Q_{s-}=n)\,\Delta Q_s^-$$

oder in Integralschreibweise

$$I(Q_t=0) = 1 - \int_0^t I(Q_{s-}=0)\,dQ_s^+ + \int_0^t I(Q_{s-}=1)\,dQ_s^-$$

und für $n=1$

$$I(Q_t=n) = \int_0^t I(Q_{s-}=n-1)\,dQ_s^+ + \int_0^t I(Q_{s-}=n+1)\,dQ_s^- - \int_0^t I(Q_{s-}=n)\,dQ_s^+ + \int_0^t I(Q_{s-}=n)\,dQ_s^-$$

Dabei sind die Integrale trajektorienweise im Lebesgue-Stieltjes'schen Sinne zu verstehen. Man beachte, daß die Trajektorien $Q^+(.,\omega)$ und $Q^-(.,\omega)$,$\omega\in\Omega$, maßdefinierende Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ sind.

Die Theorie der stochastischen Lebesgue-Stieltjes Integrale gibt uns nun ein gewichtiges Hilfsmittel zur Hand:

Für einen nicht-negativen beschränkten vorhersehbaren Prozeß

$$f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt

$$E \int_0^\infty f_s \, dQ_s^+ = E \int_0^\infty f_s \lambda_s \, ds$$

und entsprechend

$$E \int_0^\infty f_s \, dQ_s^- = E \int_0^\infty f_s \mu_s \, I(Q_s=0) \, ds \quad .$$

Dies leitet man ohne weiteres aus einer allgemeineren Aussage bei LIPSTER/SHIRYAYEV, Theorem 18.6, ab.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Vorhersehbarkeit dieses Prozesses f eine entscheidende Rolle spielt.

Wir werden dieses Hilfsmittel auf nicht-negative beschränkte Prozesse mit $f(s,\omega)$ von der Gestalt

$$I\,(\,Q_{s-}^+(\omega)=n\,)\;\; I\,(\,s \leq t\,)$$

bzw. $$I\,(\,Q_{s-}^-(\omega)=n\,)\;\; I\,(\,s \leq t\,)$$

mit gegebenem $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$.

Daß diese Prozesse vorhersehbar sind, folgt sofort daraus, daß sie offensichtlich $(\mathcal{F}_s)$-adaptiert und linksseitig stetig sind.

Also

$$E\, I(Q_t=0) = 1 - E\int_0^t I(Q_{s-}=0)\lambda_s ds + E\int_0^t I(Q_{s-}=1)\mu_s ds$$

und für $n \geq 1$

$$E\, I(Q_t=n) = E\int_0^t I(Q_{s-}=n-1)\lambda_s ds + E\int_0^t I(Q_{s-}=n+1)\mu_s ds$$
$$- E\int_0^t I(Q_{s-}=n)\lambda_s ds + E\int_0^t I(Q_{s-}=n)\mu_s ds$$

Die folgenden Betrachtungen führen wir exemplarisch an

$E \int_0^t I(Q_{s-}=n-1)\lambda_s ds$ durch; für die übrigen Terme verläuft dies vollkommen analog.

Es ist $E\int_0^t I(Q_{s-}=n-1)\lambda_s ds = E\int_0^t I(Q_s=n-1)\lambda_s ds =: \Psi$

da für jedes $\omega \in \Omega$, der Integrand auf einer Menge vom Lebesgue-Maß Null abgeändert werden kann, ohne den Wert des Integrals zu verändern.

Somit

$$\Psi = \int_0^t E\left[I(Q_s=n-1)\lambda_s \right] ds$$

mit dem Satz von Fubini unter Beachtung der Meßbarkeit des Prozesses $(s,\omega) \longmapsto I(Q_s=n-1)\lambda_s$.

Wir erhalten weiter

$$\Psi = \int_0^t \int_{\{Q_s=n-1\}} \lambda_s \, P(d\omega) \, ds = \int_0^t E(\lambda_s \mid Q_s=n-1) p_{n-1}(s) ds$$

Für $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{R}_+$ werde

$$\bar{\lambda}_n(s) := E(\lambda_s \mid Q_s=n)$$
$$\bar{\mu}_n(s) := E(\mu_s I(Q_s \neq 0) \mid Q_s=n)$$

gesetzt.

Offenbar gilt $\bar{\mu}_0(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$

und $\bar{\mu}_n(s) = E(\mu_s \mid Q_s=n)$ für $n \geq 1$.

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten ergibt sich daraus das folgende Integralgleichnungssystem:

$$p_o(t) = 1 - \int_o^t \overline{\lambda}_o(s)p_o(s)ds + \int_o^t \overline{\mu}_1(s)p_1(s)ds$$

und für $n \geq 1$

$$p_n(t) = \int_o^t \overline{\lambda}_{n-1}(s)p_{n-1}(s)ds - \int_o^t [\overline{\lambda}_n(s) + \overline{\mu}_n(s)]\, p_n(s)ds + \int_o^t \overline{\mu}_{n+1}(s)p_{n+1}(s)ds$$

Damit erhält man folgendes Differentialgleichungssystem (wobei ein Punkt über einer Funktion deren Ableitung kennzeichnet), d. h. es gilt für Lebesgue-fast alle $t \in \mathbb{R}_+$ das

(3.1) System

$$\dot{p}_o(t) = - \overline{\lambda}_o(t)p_o(t) + \overline{\mu}_1(t)p_1(t)$$

und für $n \geq 1$

$$\dot{p}_n(t) = \overline{\lambda}_{n-1}(t)p_{n-1}(t) - [\overline{\lambda}_n(t)+\overline{\mu}_n(t)]\, p_n(t) + \overline{\mu}_{n+1}(t)p_{n+1}(t)$$

Für konstante Intensitäten $\lambda(t,\omega) \equiv \lambda > 0$ und $\mu(t,\omega) \equiv \mu > 0$ hat man das bekannte herkömmliche Differentialgleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten eines (Markovschen) M/M/1-Wartesystems. (Man beachte $\overline{\lambda}_n(t) = \lambda$ und $\overline{\mu}_n(t) = \mu$.) Das System (3.1) hat jedoch vor allem insofern eine viel allgemeinere Struktur, als die Koeffizienten Lebesgue-meßbare Funktionen der Zeit sind.

In unserem Fall haben wir als Anfangswert

$$(p_0(0),p_1(0),p_2(0),\ldots) = (1,0,0,\ldots)$$

und die Existenz einer Lösung dieses Anfangswertproblems ist aufgrund des Satzes (2.20) gesichert. Allerdings lassen sich daraus noch keine Schlüsse auf deren Eindeutigkeit ziehen. (Man siehe jedoch Abschnitt 3.2.)

Es ist ersichtlich, daß innerhalb der Menge der intensitätserzeugten Warteprozesse eine ganze Klasse von Prozessen existiert (gleiche $\bar{\lambda}_n$ und gleiche $\bar{\mu}_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$), welche die gleichen Zustandswahrscheinlichkeiten aufweisen. Insbesondere gibt es zu jedem von λ und μ erzeugten Warteprozeß einen Markovschen intensitätserzeugten Warteprozeß, nämlich den mit den Intensitäten

$$\lambda^M(t,\omega) := \bar{\lambda}_{Q_t(\omega)}(t)$$

$$\mu^M(t,\omega) := \bar{\mu}_{Q_t(\omega)}(t) \quad ,$$

der dieselben Zustandswahrscheinlichkeiten hat.
Darauf werden wir im 4. Abschnitt zurückkommen.

3.2. Unendliche Differentialgleichungssysteme Approximation mittels endlicher Systeme

Obiges Differentialgleichungssytem (3.1) bzw. das äquivalente Integralgleichungssystem besteht aus unendlich vielen Gleichungen. Allgemeine Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und deren Bestimmung lassen sich nicht so ohne weiteres vom Fall eines endlichen Systems übertragen.

In diesem Einschub über unendliche Differentialgleichungssysteme sollen Aussagen über obige in der Theorie der Geburts-

und Todesprozesse vorkommenden Systeme gemacht werden, die zwar nicht für unser Kontrollproblem nötig sind, jedoch eigenständige Bedeutung für die Warteschlangentheorie haben.

Mit

$$p(t) := (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \ldots)' \quad \text{und} \quad p^0 := (1,0,0,\ldots)$$

betrachten wir folgendes

(3.2) System

$$p(t) = p^0 + \int_0^t A(s)p(s)ds \quad , \qquad t \in \mathbb{R}_+ \quad ,$$

wobei A(s) eine unendliche Matrix der Gestalt

$$A(s) = \begin{pmatrix} -\lambda_0(s) & \mu_1(s) & 0 & \cdots \\ \lambda_0(s) & -[\lambda_1(s)+\mu_1(s)] & \mu_2(s) & \cdot \\ 0 & \lambda_1(s) & -[\lambda_2(s)+\mu_2(s)] & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_2(s) & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

und $\lambda_n(t)$ und $\mu_n(t)$ gleichmäßig in n und t beschränkte Lebesgue-meßbare Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ sind.[1) 2)]

Die Problematik besteht nicht nur im Vorliegen unendlich vieler Gleichungen, sondern auch darin, daß aufgrund der allgemeinen Gestalt der Koeffizienten λ_n und μ_n als Funktionen der Zeit im allgemeinen Lösungen nicht in der Klasse der differenzierbaren Funktionen sondern höchstens der absolutstetigen zu finden sein werden. Daß keine Einschränkung auf stetige Koeffizienten vorliegt, ist vor allem in kontrolltheoretischer Hinsicht von Bedeutung: Werden gewisse Koeffizienten als Kontrollen betrachtet, so müssen diese auch unstetig sein können, wenn schlagkräftige Aussagen erwartet werden. Nicht zuletzt haben unstetige Kontrollen

1) Die Betrachtungen hier sind "nicht-stochastisch": Da die Funktionen λ_n und μ_n nicht wie im Abschnitt 3.2. von Intensitätsprozessen λ^n und μ^n herrühren, können wir uns hier den Querstrich ersparen.

2) Die Integration ist gliedweise zu verstehen.

auch eine praktische Berechtigung, da sie oft von vornherein als zugelassen zu betrachten sind.

Obiges System (3.2) läßt sich nun auch als (äquivalentes) Differentialgleichungssystem schreiben, wobei Lösungen im Sinne von Caratheodory zu verstehen sind, d. h. als absolutstetige Funktionen auf Intervallen von $\mathbb{R}_+$, die dem System Lebesgue-fast überall genügen.

(3.3) System

$$\dot{p}(t) = A(t)\, p(t) \quad , \qquad t \in \mathbb{R}_+$$
$$p(0) = p^0$$

$A(t)$ und p^0 wie im System (3.1)

Dies ist ein unendliches lineares homogenes Differentialgleichungssystem mit spezieller Koeffizientenmatrix und speziellem Anfangswert.

Solche Systeme mit dieser speziellen Koeffizientenmatrix-Struktur werden bereits in der für die Theorie der Geburts- und Todesprozesse bedeutungsvollen Arbeit von LEDERMANN/REUTER untersucht: Dabei hat man allerdings nur den Fall zeitlich konstanter Koeffizienten untersucht, jedoch unter abgeschwächten Beschränktheitsvoraussetzungen.
Funktionalanalytische Methoden, wie sie in jüngerer Zeit auf unendliche Differentialgleichungssysteme angewandt werden (siehe DEIMLING) dürften eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von LEDERMANN/REUTER bei gleichzeitiger Verkürzung und größerer Transparenz der Beweisführung ermöglichen.
Da unsere Beschränktheitsvoraussetzung für die Warteschlangentheorie praktisch keine Einschränkung bedeutet, wollen wir unter dieser Voraussetzung auf den Fall zeitabhängiger Koeffizienten eingehen. Mit der Anwendung der Arbeit von SHAW auf S.56, die von allgemeineren Koeffizientenmatrix-Strukturen ausgeht, läßt sich dies in angemessener Kürze bewerkstelligen,

so daß für uns nur noch der die "systemgerechte Truncation" betreffende Teil zu erarbeiten bleibt.[1)]

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ bilden wir aus der Matrix $A(t)$ zwei neue Matrizen:

Unter der N-ten Galerkin-Truncation von $A(t)$ versteht man die Matrix $A^{(N)}(t)$, die aus $A(t)$ durch Verwandlung aller Glieder unterhalb der N-ten Zeile und rechts von der N-ten Spalte in eine Null entsteht.

Unter der N-ten systemgerechten Truncation von $A(t)$ verstehen wir die Matrix

$$B^{(N)}(t) := A^{(N)}(t) + \left(\delta_{iN} \; \delta_{jN} \; \lambda_N(t) \right)_{\substack{i=0,1,2,\dots \\ j=0,1,2,\dots}} .$$

Man hat also (zur Veranschaulichung)

$$A^{(N)}(t) := \left(\begin{array}{cc|c} & \dots & \mu_N(t) \\ & & \\ & - \left[\lambda_N(t) + \mu_N(t) \right] & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & 0 \end{array} \right)$$

und bei $B^N(t)$ hat man anstelle von $- \left[\lambda_N(t) + \mu_N(t) \right]$ nur $\mu_N(t)$.

Die beiden nächsten Differentialgleichungssysteme sind zwar formal unendliche Systeme; es ist aber klar, daß sie wie endliche behandelt werden können.

---

1) Im Gegensatz zu LEDERMANN/REUTER zielt SHAW nicht direkt auf die stochastischen Prozesse ab, wo eben gerade die "systemgerechte Truncation" wichtiger als die "Galerkin-Truncation" ist.

(3.4) System

$$\dot{q}^{(N)}(t) = A^{(N)}(t)\, q^{(N)}(t) , \qquad t \in \mathbb{R}_+$$
$$q^{(N)}(0) = p^0$$

A(t) und p^0 wie in System (3.2) und $A^{(N)}(t)$ N-te Galerkin-Truncation von A(t).

(3.5) System

$$\dot{p}^{(N)}(t) = B^{(N)}(t)\, p^{(N)}(t) , \qquad t \in \mathbb{R}_+$$
$$p^{(N)}(0) = p^0$$

A(t) und p^0 wie in System (3.2) und $B^{(N)}(t)$ N-te systemgerechte Truncation von A(t).

Die Galerkin-Truncation hat nun gegenüber der systemgerechten Truncation den Nachteil, daß Lösungen $q^{(N)}$ im Gegensatz zu Lösungen $p^{(N)}$ keine Wahrscheinlichkeiten repräsentieren:

Es folgt direkt aus Anhang 2, daß für $t \in \mathbb{R}_+$ und $n=0,1,\ldots,N$

$$q_n^{(N)}(t) \geq 0 \quad \text{und} \quad p_n^{(N)}(t) \geq 0 ,$$

wogegen offensichtlich

$$\sum_{n=0}^{N} p_n^{(N)}(t) = 1 \quad \text{aber nur} \quad \sum_{n=0}^{N} q_n^{(N)}(t) \leq 1 .$$

Sei nun $[0,t_e]$ ein Intervall, $t_e > 0$, und sei $\mathcal{C}$ die Klasse von Funktionen

$$x : [0,t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$$

mit (i) x_n ist absolutstetig für $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\|x(t)\| := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |x_n(t)|$ beschränkt in $[0,t_e]$,

(iii) $\|x(t)\|$ ist stetig .

Nach SHAW gibt es dann für die Systeme (3.3),(3.4),(3.5) genau je eine Lösung p, $q^{(N)}$, $p^{(N)}$ in $\mathcal{C}$.

Das Neue bei SHAW ist die Aussage bezüglich des unendlichen Systems (3.5). SHAW zeigt allgemeiner, daß jedes unendliche lineare System

$$\dot{x} = A(t)\,x$$
$$x(0) = c \quad ,$$

wobei die unendliche Matrix A(t) die meßbaren Koeffizienten $a_{ij}(t)$ hat, genau eine Lösung in $\mathcal{C}$ besitzt, wenn gilt:

$$\|c\| < \infty, \quad \sup_i \sum_j |a_{ij}(t)| \leq M \quad \text{und} \quad \sup_j \sum_i |a_{ij}(t)| \leq M \quad \text{auf } [0,t_e] .$$

Somit gibt es für das System (3.5) genau eine Lösung $p^{(N)}$, welche notwendigerweise für jedes $t\in[0,t_e]$ eine Wahrscheinlichkeit repräsentiert.
Was das System (3.3) anbelangt, so folgt mit der Differentialungleichung aus Anhang 2, daß für die eindeutige Lösung p gilt:

$$p_n(t) \geq 0 \quad \text{für } n\in\mathbb{N} \text{ und alle } t\in[0,t_e] .$$

Hieraus folgt die Normierung von p, so daß auch p eine Wahrscheinlichkeit repräsentiert. Man hat nämlich

$$\overline{\|\dot{p}(t)\|} = \overline{\sum_{n=0} |\dot{p}_n(t)|} = \sum_{n=0} \dot{p}_n(t) = 0 \quad , \quad \text{also } \|p(t)\| = \text{const.}$$

Wegen $p(0) = p^0$, erhält man $\|p(t)\| = 1$ auf $[0,t_e]$.

Die Folge $(q^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ heißt Folge der Galerkin-Approximationen.
Gemäß SHAW gilt nun die folgende Konvergenzaussage, die als ein "principe des réduites" bezeichnet wird:

Für $N\to\infty$ konvergiert $q^{(N)}$ gleichmäßig gegen p auf $[0,t_e]$.

(3.6) Behauptung: Für $N\to\infty$ konvergiert $p^{(N)}$ gleichmäßig gegen p auf $[0,t_e]$.

Beweis:

Aus der in Anhang 2 angegebenen Differentialungleichung folgt

$$q_n^{(N)} \leq p_n^{(N)} \qquad \text{für} \quad n=0,1,\ldots,N$$

und $$q_n^{(N-1)} \leq q_n^{(N)} \qquad \text{für} \quad n=0,1,\ldots,N-1 \ .$$

Man hat die Dreiecksungleichung

$$\left\| p(t)-p^{(N)}(t) \right\| \leq \left\| p(t)-q^{(N)}(t) \right\| + \left\| p^{(N)}(t)-q^{(N)}(t) \right\|$$

für $t \in [0,t_e]$.

Wegen obigem "principe des réduites" bleibt nur noch der zweite Term auf der rechten Seite abzuschätzen.

Beachtet man die erste der beiden oberen Ungleichungen, so bekommt man

$$\left\| p^{(N)}(t)-q^{(N)}(t) \right\| = \sum_{n=0}^{N} \left| p_n^{(N)}(t)-q_n^{(N)}(t) \right| = \sum_{n=0}^{N} \left(p_n^{(N)}(t)-q_n^{(N)}(t) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} p_n^{(N)}(t) - \sum_{n=0}^{N} q_n^{(N)}(t)$$

$$= 1 - \left(1 - \int_0^t \lambda_N(s) q_N^{(N)}(s)\, ds \right) \quad 1)$$

$$\leq c \int_0^t q_N^{(N)}(s)\, ds \qquad \text{mit einem} \quad c>0 \ ,$$

wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Koeffizienten.

Mit den beiden ersten oberen Ungleichungen ist

$$q_N^{(N)} \leq p_N^{(N)} = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} p_n^{(N)} \leq 1 - \sum_{n=0}^{N-1} q_n^{(N)} \leq 1 - \sum_{n=0}^{N-1} q_n^{(N-1)}$$

Also gilt $\left| q_N^{(N)}(s) \right| \leq 1 - \left\| q^{(N-1)}(s) \right\|$.

1) Für $q_n^{(N)}(t)$ verwende man die Integraldarstellung des Systems (3.4).

Obiges "principe des réduites" besagt

$$\left\| q^{(N)}(s) \right\| \longrightarrow 1 \qquad \text{gleichmäßig für } s\in[0,t_e] \ ,$$

woraus sich nun direkt

$$q_N^{(N)}(s) \longrightarrow 0 \qquad \text{gleichmäßig für } s\in[0,t_e]$$

ergibt.

Mit der Abschätzung

$$\left\| p^{(N)}(t)-q^{(N)}(t) \right\| \leq c\ t_e \sup_{s\in[0,t_e]} q_N^{(N)}(s)$$

ist man fertig. ▷

Die Bedeutung der Behauptung (3.6) liegt in der Interpretation der systemgerechten Truncation:

Sie ist die mathematische Umsetzung der Beschränkung der Warteplätze (die Servicestelle zählt als 1 Platz) von ursprünglich unendlich vielen auf N Plätze, wobei dann $p_o^{(N)}$, $p_1^{(N)}$, ... , $p_N^{(N)}$ die neuen Zustandswahrscheinlichkeiten sind.

4. Optimierungsmodell

4.1. Formulierung des stochastischen Kontrollmodells

Wir geben folgende Größen fest vor und geben ihre Bedeutung im direkten Bezug auf Abschnitt 1.1. an.

$[0,t_e]$ endlicher Zeithorizont, $t_e > 0$

λ Ankunftsintensität; meßbare beschränkte Funktion der Zeit [1], stets positiv

$N \in \mathbb{N}$ Anzahl der Warteplätze, wobei die Servicestelle als 1 Warteplatz zählt

$U = [\underline{m},\overline{m}]$ Intervall, aus welchem der momentane Wert der Service-Intensität gewählt werden kann; $\overline{m} \geq \underline{m} \geq 0$

Φ_i Kostenbetrag für i im Zeitpunkt t_e im System verbliebene Kunden; wir schreiben $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1,\ldots,\Phi_N)'$ und setzen $\Phi_0 = 0$ voraus

$c(t,i,v)$ Kostenrate im Zeitpunkt t, wenn i Kunden im System sind und die Service-Intensität den Wert v annimmt;
$c: [0,t_e] \times \{0,1,\ldots,N\} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt

$\mathcal{U}$ Klasse der (zulässigen) Steuerungen; dies sind die Intensitätsprozesse μ auf dem Basismeßraum der Warteprozesse mit Werten in U.

$\mathcal{U}^M$ Klasse der Markov-Steuerungen aus $\mathcal{U}$.

Aufgrund des Satzes (2.20) ist nun der folgende Erwartungswert sinnvoll definiert.

---

1) also deterministisch

Es sei für $\mu \in \mathcal{U}$

$$J(\mu) = E\left[\int_0^{t_e} c(s,Q_s,\mu_s)ds + \Phi(Q_{t_e}) \right] .$$

Im Rahmen des Optimierungsproblems ist der Erwartungswert nur als von der Service-Intensität μ abhängig zu sehen. Wir verzichten nach Möglichkeit, μ stets als Index anzugeben.

(4.1) Problem (S) [1]

Minimiere $J(\mu)$ in $\mathcal{U}$.

(4.2) Problem (S^M)

Minimiere $J(\mu)$ in $\mathcal{U}^M$.

Wie in Abschnitt 3.1. bereits vermerkt, kann jeder Steuerung $\mu \in \mathcal{U}$ eine Markov-Steuerung $\mu^M \in \mathcal{U}^M$ zugeordnet werden, welche dieselben Zustandswahrscheinlichkeiten erzeugt.
Wir bezeichnen diesen Vorgang als Markovisierung der Steuerung μ und μ^M die Markovisierte (von μ) :

$$\bar{\mu}_i(t) := E\left(\mu_t \mid Q_t=i \right) \qquad i=0,1,\ldots,N \; ; \; t \in [0,t_e]$$

$$\mu^M(t,\omega) := \bar{\mu}_{Q_t(\omega)}(t) .$$

Offenbar ist μ^M ein nicht-negativer beschränkter adaptierterProze
Er ist meßbar, was leicht aus der Meßbarkeit von Q zu folgern ist.
Desweiteren ist klar, daß seine Werte ebenfalls in U liegen.

Eine Steuerung μ heißt mindestens ebenso gut wie eine andere ρ, wenn $J(\mu) \leq J(\rho)$ gilt.

---

1) "S" von "stochastisch"

Folgende Beziehung leitet unten angegebenes Markovisierungsprinzip ein; offensichtlich gilt nämlich

$$(4.3)\quad J(\mu) = \int_0^{t_e} E\, c(s,Q_s,\mu_s)\, ds + E\, \Phi(Q_{t_e})$$

$$= \int_0^{t_e} \sum_{i=0}^{N} E(\, c(s,i,\mu_s) \mid Q_s=i\,)\, p_i(s)\, ds$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} \Phi_i\, p_i(t_e)$$

Eine Kostenrate heißt <u>konvex bezüglich der Steuerung</u>, wenn die Funktion c bei festem t und i eine in der Variablen v konvexe Funktion ist. [1)]

(4.4) <u>Lemma</u> (Markovisierungsprinzip)

Ist die Kostenrate bezüglich der Steuerung konvex, so ist die Markovisierte einer Steuerung mindestens ebenso gut wie diese Steuerung.

<u>Beweis:</u>

Wir gehen von (4.3) aus.

Mit der bekannten Ungleichung von Jensen (siehe etwa BAUER, p.310) folgt

$$\int_0^{t_e} \sum_{i=0}^{N} E_\mu(\, c(s,i,\mu_s) \mid Q_s=i\,)\, p_i^{(\mu)}(s)$$

$$\geq \int_0^{t_e} \sum_{i=0}^{N} c(s,i,E_\mu(\mu_s \mid Q_s=i))\, p_i^{(\mu)}(s)\, ds$$

1) D. h. $c(t,i,\alpha v_1 + \beta v_2) \leq \alpha c(t,i,v_1) + \beta c(t,i,v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha + \beta = 1$.

$$= \int_0^{t_e} \sum_{i=0}^{N} E_{\mu^M}(c(s,i,\mu^M) \mid Q_s=i) \, p_i^{(\mu^M)}(s) \, ds$$

$$= \int_0^{t_e} E_{\mu^M} c(s,Q_s,\mu_s^M) \, ds$$

Dabei ist zu beachten, daß unter der Steuerung μ und unter ihrer Markovisierten μ^M die Zustandswahrscheinlichkeiten dieselben sind, was auch auf den zweiten Summanden in (4.3) anzuwenden ist.
Desweiteren ist μ_s^M auf der Menge $\{Q_s=i\}$ konstant, nämlich gleich dem bedingten Erwartungswert $E(\mu_s \mid Q_s=i)$. ▷

Besonders hervorzuheben ist der Fall einer Kostenrate, die linear in der Steuerung ist, d. h. von der Form

$$c(s,Q_s,v) = c_1(s,Q_s) + c_2(s,Q_s)\, v$$

ist.
Da sowohl c als auch -c in diesem Fall konvex in der Steuerung sind, ergibt die Anwendung des Markovisierungsprinzips, daß $J(\mu) = J(\mu^M)$ für $\mu \in \mathcal{U}$ gilt, wozu man auch sagen kann, daß die Markovisierte einer Steuerung genauso gut wie diese Steuerung selbst ist. Dieses Ergebnis erhält man auch durch einfache Rechnung (Linearität des bedingten Erwartungswertes).

Im folgenden Abschnitt 4.2. wird das Problem (S^M) in ein deterministisches transformiert und so der (deterministischen) Kontrolltheorie zugänglich gemacht.
Obwohl das Problem (S^M) von eigenständiger Bedeutung ist, gewinnt es im Falle bezüglich der Steuerung konvexer Kostenraten aufgrund des Markovisierungsprinzip an Wichtigkeit: mit ihm ist dann sofort auch Problem (S) gelöst.

4.2. Ein deterministisches Kontrollmodell und seine Beziehung zum stochastischen

Für Markov-Steuerungen $\mu \in \mathcal{U}^M$ erhält man mit

$$\mu(t,\omega) = \mu(t,Q_t(\omega)) = \bar{\mu}_{Q_t(\omega)}(\omega)$$

aus der Beziehung (4.3)

$$J(\mu) = \int_0^{t_e} \sum_{i=0}^{N} c(s,i,\bar{\mu}_i(s))p_i(s)\,ds + \sum_{i=0}^{N} \Phi_i\, p_i(t_e) .$$

Diese Gestalt von $J(\mu)$ motiviert die Entwicklung des folgenden deterministischen Kontrollmodells.

Neben den Benennungen und Voraussetzungen von Abschnitt 4.1. wird eingeführt:

$u = (u_0,u_1,\ldots,u_n)'$ Kontrolle (oder Kontrollvektor)[1]
$u_i : [0,t_e] \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar
mit $u_i(t) \in U$ für alle $t \in [0,t_e]$

$\mathcal{K}$ sei definitionsgemäß die Klasse obiger Kontrollvektoren

$$B(t,u(t)) := \begin{pmatrix} -\lambda(t) & u_1(t) & & & 0 \\ \lambda(t) & -[\lambda(t)+u_1(t)] & u_2(t) & & \\ & \lambda(t) & -[\lambda(t)+u_2(t)] & \ddots & \\ 0 & & \lambda(t) & \ddots & u_N(t) \\ & & & \lambda(t) & -u_N(t) \end{pmatrix}$$

für $u \in \mathcal{K}$ und $t \in [0,t_e]$

Das Kapitel 3. hat gezeigt, daß das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = B(t,u(t))\,x(t) , \quad t \in [0,t_e]$$
$$x(0) = (1,0,\ldots,0)$$

1) Für die u_i verwendet man auch die Bezeichnung Kontrolle

für jedes $u \in \mathcal{K}$ genau eine Lösung $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N)'$ (im Sinne von Caratheodory) auf $[0, t_e]$ besitzt und diese für jedes $t \in [0, t_e]$ eine Wahrscheinlichkeit repräsentiert.

Somit ist folgende Bewertung von $u \in \mathcal{K}$ wohldefiniert:

$$(4.5) \qquad K(u) := \int_0^{t_e} \sum_{i=0}^{N} c(s,i,u_i(s))\, x_i(s)\, ds + \sum_{i=0}^{N} \Phi_i\, x_i(t_e)$$

Beachtet man $\Phi_0 = 0$ und $x(0) = (1,0,\ldots,0)$, so erhält man

$$K(u) = \int_0^{t_e} L(s,x(s),u(s))\, ds \quad ,$$

wobei gesetzt wurde

$$(4.6) \quad L(s,x(s),u(s)) := \left[(c(s,0,u_0(s)),\ldots,c(s,N,u_N(s))) + \Phi' B(s,u(s)) \right] x(s)$$

für $s \in [0, t_e]$

Diese Funktion L nennt man Lagrange-Funktion des deterministischen Problems, welches wir anschließend formulieren.

(4.7) Problem (D)

Minimiere $K(u)$ in $\mathcal{K}$.

Auf den kontrolltheoretischen Rahmen dieses Problems gehen wir in Abschnitt 5.1. ein.

Das folgende Lemma erlangt seine eigentliche Bedeutung erst zusammen mit dem Markovisierungsprinzip, das besagt, daß im Falle einer in der Steuerung konvexen Kostenrate es genügt, Problem (S^M) zu lösen, wenn man eine Lösung von Problem (S) sucht.

Die Konvexität der Kostenrate in der Steuerung geht als Voraussetzung auch in den Satz über die Existenz optimaler Kontrollen (siehe Satz (5.4)) ein.

(4.8) Lemma (Äquivalenzprinzip für Probleme (D) und (S^M))

a) Ist u^* eine optimale Lösung des Problems (D), d.h. $u^* \in \mathcal{K}$

und $$K(u^*) = \min_{u \in \mathcal{K}} K(u) \quad ,$$

so ist μ mit

$$\mu(t,\omega) := u^*_{Q_t(\omega)}(t)$$

eine optimale Lösung des Problems (S^M), d.h. $\mu \in \mathcal{U}^M$

und $$J(\mu) = \min_{\rho \in \mathcal{U}^M} J(\rho) \quad .$$

b) Ist μ eine optimale Lösung des Problems (S^M),

so ist u mit

$$u_i(t) := \bar{\mu}_i(t) = E(\mu_t \mid Q_t = i)$$

eine optimale Lösung des Problems (D).

Beweis:

Aufgrund der der Formulierung des Prinzips vorangegangenen Entwicklung des Problems bleibt nicht mehr viel zu tun.

a) Sei u optimale Lösung des Problems (D).
Angenommen, obiges μ ist keine optimale Lösung des Problems (S^M).
Dann gibt es aber ein $\rho \in \mathcal{U}^M$ mit $J(\rho) \leq J(\mu)$.
Wegen $J(\mu) = K(u)$ und $J(\rho) = K((\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_N))$
hat man einen Widerspruch zur Optimalität von u in $\mathcal{K}$.

b) Analoge Schlußweise wie bei a). ▷

5. Methoden der deterministischen Kontrolltheorie I : Minimumprinzip von Pontrjagin

Zunächst soll hier kurz ein allgemeineres kontrolltheoretisches Modell umrissen werden. Dies ist nötig, da das Problem (D) nicht etwa als ein Standardproblem mit direktem Verweis auf ein entsprechendes Lehrbuch behandelt werden kann.
Es wird zwar einerseits auf eine größtmögliche Allgemeinheit des Modells verzichtet, andererseits soll jedoch der Rahmen groß genug gewählt werden, so daß grundlegende Wesenszüge der Kontrolltheorie und deren Beziehungen zu unserem Problem (D) erkennbar sind.

Als Basisliteratur gelte FLEMING/RISHEL (F/R abgekürzt). Man siehe aber auch BERKOVITZ.
Das Buch von FLEMING/RISHEL scheint den Zwang zum Nachprüfen subtiler technischer Voraussetzungen in Grenzen zu halten, da sich unser Modell am besten einfügt. Allerdings kommt man nicht ganz ohne technische Vorarbeiten aus, allein um die wichtigen Sätze formulieren zu können.

5.1. Allgemeiner kontrolltheoretischer Rahmen für das deterministische Kontrollproblem, Existenz optimaler Kontrollen

Wir betrachten ein deterministisches System während eines fest vorgegebenen Zeitraums $[0,t_e]$ mit Anfangszeitpunkt 0 und Endzeitpunkt $t_e > 0$.
Der Zustand des Sytems kann in jedem Zeitpunkt durch ein reelles (n+1)-Tupel , $n \in \mathbb{N}$ fest, beschrieben werden, also durch eine Funktion

$$x : [0,t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} ,$$

wobei wir für den Zustandsvektor $x(t)$ schreiben

$$x(t) = (x_0(t),x_1(t),\ldots,x_n(t))' .$$

Der Anfangszustand des Systems sei fest vorgegeben:

$$x(0) = x^0 = (x_0^0,x_1^0,\ldots,x_n^0).$$

Die weitere Entwicklung des Systems kann jedoch wie folgt beeinflußt werden:

Man hat eine Funktion

$$f \quad : \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t,x,z) = (f_0(t,x,z), f_1(t,x,z), \ldots, f_n(t,x,z))',$$

$k \in \mathbb{N}$.

Die Entwicklung des Zustandes verlaufe nun gemäß der als Bewegungsgleichung bezeichneten Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \quad , \quad t \in [0,t_e]$$
$$x(0) = x^o \quad ,$$

wobei über $u(t)$ im näher zu bezeichnenden Sinne verfügt werden kann.
Wir nennen eine Funktion

$$u \quad : \quad [0,t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$
$$u(t) = (u_0(t), u_1(t), \ldots, u_k(t))'$$

Kontrolle, wenn u (Lebesgue-)integrierbar ist und zu jedem u genau eine Lösung x (im Sinne von Caratheodory) obigen Anfangswertproblems existiert, und zwar auf $[0,t_e]$. Dieses x heißt dann die zu u gehörige Trajektorie.

Verfügt werden kann nun über die sogenannten zulässigen Kontrollen; dies sind diejenigen Kontrollen, welche folgende Nebenbedingung erfüllen:

$$u(t) \in \tilde{U} \qquad \text{für alle} \quad t \in [0,t_e] \quad ,$$

wobei $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ als sogenannter Kontrollbereich fest vorgegeben ist.[1)]

Die Klasse der zulässigen Kontrollen bezeichnen wir mit $\mathcal{K}$ und bewerten den Systemverlauf durch ein Kostenfunktional K auf :

$$K(u) = \int_0^{t_e} L(s,x(s),u(s))\, ds \quad ,$$

$u \in \mathcal{K}$ und x zugehörige Trajektorie.

1) Man verwechsle $\tilde{U}$ nicht mit dem auf S. 59 betrachteten Steuerbereich U. Wir werden jedoch auf Kontrollbereiche $\tilde{U} = U^{k+1}$ zurückkommen.

Hier ist L eine als Lagrange-Funktion bezeichnete integrierbare Funktion

$$L : [0,t_e] \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(5.1) Problem (D^A) [1]

Minimiere K(u) in $\mathcal{K}$.

Kurz zusammengefaßt bedeutet dies:

$$\int_0^{t_e} L(s,x(s),u(s))\,ds \;\ldots\ldots\; \text{Minimum!}$$

unter den Bedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad t\in[0,t_e]$$
$$x(0) = x^0$$
$$u(t) \in \tilde{U}$$

Wir wollen gewisse Merkmale unseres Modells besonders betonen, um einen Vergleich mit anderen herkömmlichen Modellen zu erleichtern:

Es liegt ein Kontrollproblem mit festem Anfangs- und Endzeitpunkt vor. Der Anfangszustand ist ebenfalls fest, wogegen der Endzustand frei ist.
Unser Problem (D^A) ist ein Lagrange-Problem(betreffend die Gestalt von K(u)). Es sei nur erwähnt, daß dies gegenüber den in eingangs zitierten Büchern vorkommenden Problemen in anderen Kostenformen keine Einschränkung bedeutet, da diese in dem jeweils dort bechriebenen Sinn äquivalent sind. Entsprechende Aussagen lassen sich dann auch ohne große Schwierigkeiten umformen.

(5.2) Voraussetzungen

a) f sei stetig differenzierbar
b) L sei stetig differenzierbar
c) $\tilde{U}$ sei kompakt

---

1) D von "deterministisch" und A von "allgemein"

Die Existenz in $\mathfrak{X}$ optimaler Kontrollen, d. h. die Existenz von Lösungen des Problems (D^A) beruht im wesentlichen auf gewissen "Konvexitätseigenschaften" der Objekte, auf welche sich Voraussetzung (5.2) bezieht.

Mit Kapitel III von FLEMING/RISHEL erhält man das

(5.3) Lemma

Neben den Voraussetzungen (5.2) gelte

(i) f ist von der Gestalt

$$f(t,x,z) = \alpha(t,x) + \beta(t,x)\, z$$

mit einem (n+1)-dimensionalen Vektor $\alpha(t,x)$ und einer $((n+1)\times(k+1))$-Matrix $\beta(t,x)$,

(ii) $\tilde{U}$ ist eine konvexe Menge,

(iii) $L(t,x,z)$ ist bei festem (t,x) eine konvexe Funktion auf U in der Variablen z.

Dann existiert eine Lösung des Problems (D^A).

Zum Beweis sehe man F/R , Theorem 4.1. und Korollar 4.1. (Kapitel III). Was die dortige Voraussetung (2.4) betrifft, beachte man die stetige Differenzierbarkeit, die Kompaktheit des Zeitraums und des Kontrollbereichs. Damit ist auch klar, daß es ein Kompaktum $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, mit $x(t) \in R$ für alle $t\ [0,t_e]$. f braucht somit nur auf der kompakten Menge $[0,t_e] \times R \times \tilde{U}$ betrachtet zu werden. Insbesondere hat man $x(t_e) \in R$, was für die Voraussetzung (4.3c) bei F/R von Bedeutung ist.

Mit obigem Lemma läßt sich nun die Existenz von Lösungen des Problems (D) unter Voraussetzungen zeigen, die für praktische Anwendungen kaum zu restriktiv sein dürften. Mit diesem Existenzsatz ist es möglich, das Minimumprinzip von Pontrjagin zur Bestimmung optimaler Kontrollen heranzuziehen. Dieses Minimumprinzip liefert nur notwendige Bedingungen für eine optimale Kontrolle. Erhält man daraus jedoch nur eine einzige in Frage kommende Kontrolle,

so garantiert uns der folgende Existenzsatz, daß diese Kontrolle tatsächlich eine optimale ist.

(5.4) Satz

Das Problem (D) hat eine Lösung, wenn gilt:

(i) Die (deterministische) Ankunftsintensität $\lambda(t)$ ist stetig differenzierbar.

(ii) Die Kostenrate $c(t,i,v)$ ist bei festem i stetig differenzierbar auf $[0,t_e]\times U$.

(iii) Die Kostenrate ist konvex bezüglich der Steuerung.

Beweis:

Wir wenden Lemma (5.3) an und setzen zuvor $n = N = k$.

Zwecks Zerlegung der Matrix $B(t,z)$ sei

$$\Lambda(t) := \begin{pmatrix} \lambda(t) & & & 0 & 0 \\ -\lambda(t) & \lambda(t) & & & \vdots \\ & -\lambda(t) & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda(t) & 0 \\ 0 & & & -\lambda(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(z) := \begin{pmatrix} 0 & z_1 & & 0 & \\ 0 & -z_1 & z_2 & & \\ \vdots & & -z_2 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & z_N \\ 0 & & & & -z_N \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist $B(t,z) = \Lambda(t) + B(z)$

und es gilt $B(z)\,x = B(x)\,z$, so daß

$$f(t,x,z) = B(t,z)\,x = \Lambda(t)\,x + B(x)\,z.$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von $\lambda(t)$ ist dann (5.2 a) und (5.3 i) erfüllt.

Es ist evident, daß $\tilde{U} = U^{N+1} = [\underline{m},\bar{m}]^{N+1}$ eine kompakte konvexe Menge ist. Damit hat man (5.2 c) und (5.3 ii).

Nun ist

$$L(t,x,z) = \sum_{i=0}^{N} \left[c(t,i,z_i)x_i + \phi_i(\Lambda(t)x)_i + \phi_i(B(x)z)_i \right].$$

Hieraus ist ersichtlich, daß wegen der stetigen Differenzierbarkeit der $c(.,i,.)$ und $\lambda(t)$ auch $L(t,x,z)$ stetig differenzierbar ist, d. h. (5.3 b) gilt.

Ebenso leicht folgt aus der Konvexität der Kostenrate bezüglich der Steuerung die Konvexität von L in der Variablen z, also (5.4 iii). ▷

5.2. Minimumprinzip von Pontrjagin, Anwendungen

Das Minimumprinzip von Pontrjagin läßt sich für unser in 5.1. beschriebenes Modell am günstigsten mit der sogenannten noch zu definierenden Hamilton-Funktion formulieren.
Auf die Ähnlichkeit mit dem in der Physik bekannten Hamilton-Jacobi-Formalismus sei bereits hier hingewiesen; diese wird auch im nächsten Kapitel zutage treten.

Wir definieren die Hamilton-Funktion H des Problems (D^A) durch

$$(5.5) \qquad \begin{aligned} &H : [0,t_e] \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &H(t,x,\psi,z) := L(t,x,z) + \psi' f(t,x,z) \ . \end{aligned}$$

Als Sytem der kanonischen Gleichungen bezeichnet man dann das Differentialgleichungssystem

$$(5.6) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= H_\psi(t,x,\psi,z) = f(t,x,z) \\ \dot{\psi} &= -H_x(t,x,\psi,z) = -L_x(t,x,z)' - f_x(t,x,z)'\psi \ . \end{aligned}$$

Dabei stellt der erste Teil in (5.6) offenbar genau die Bewegungsgleichung dar. Den zweiten Teil nennt man das adjungierte System für den Kozustand ψ .

(5.7) Satz (Minimumprinzip von Pontrjagin)

Es mögen die Voraussetzungen (5.2) gelten.

Es sei u^* eine in $\mathfrak{U}$ optimale Kontrolle, d. h.

$u^* \in \mathfrak{U}$ und $K(u^*) = \min_{u \in \mathfrak{U}} K(u)$.

x^* sei die zugehörige Trajektorie.

Dann gibt es eine absolutstetige Funktion

$\psi^* : [0,t_e] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

(i) $\dot{\psi}^*(t) = -H_x(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t))$

für Lebesgue-fast alle $t \in [0,t_e]$,

(ii) $\psi^*(t_e) = 0$,

(iii) $H(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t)) = \min_{z \in \tilde{U}} H(t,x^*(t),\psi^*(t),z)$

für alle $t \in [0,t_e]$.

Was den Beweis anbelangt, wird auf F/R , Kapitel II , verwiesen. Unsere Formulierung ergibt sich aus F/R , II, Theorem 5.1. und Zusatzbemerkungen, insbesondere Problem (3). Man hat dabei nur zu beachten, daß unser Modell von einer festen Anfangs- und Endzeit, festem Anfangszustand, aber freiem Endzustand ausgeht.

(5.7 ii) bezeichnet man als Transversalitätsbedingung und (5.7 iii) als Minimumbedingung.

Wie läßt sich nun aus dem Minimumprinzip eine Kontrolle ermitteln, die die darin enthaltenen notwendigen Bedingungen erfüllt?

Man wird von der Minimumbedingung ausgehen, d. h. versuchen aus

$$H(t,x(t),\psi(t),u(t)) = \min_{z\in\tilde{U}} H(t,x(t),\psi(t),z)$$

eine Kontrolle u in Abhängigkeit von t, x(t) und $\psi(t)$ zu erhalten; wir schreiben dafür

$$u(t) = u(t,x(t),\psi(t)).$$

Sodann wird man sich um eine Lösung (x^*,ψ^*) des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= H_{\psi}(t,x(t),\psi(t),u(t,x(t),\psi(t)))\\
\dot{\psi}(t) &= -H_{x}(t,x(t),\psi(t),u(t,x(t),\psi(t)))\\
x(0) &= x^{o}\\
\psi(t_e) &= 0
\end{aligned}$$

bemühen, womit man $u^*(t) = u(t,x^*(t),\psi^*(t))$ erhält.

Bei dieser Beschreibung kann man die Schwierigkeiten bei der praktischen Nutzung bereits erkennen. Selbst wenn eine Auflösung nach u aus der Minimumbedingung gelingt, lassen sich nur in den einfachsten Fällen explizite Ergebnisse aus dem Randwertproblem gewinnen, dessen Schwierigkeit eben vor allem darin liegt, daß x und ψ nicht gemeinsam zum Zeitpunkt t=0 oder $t=t_e$ vorgegeben sind.

Wir wenden uns nun dem Problem (D) zu, wobei wir hier nur den Fall einer in der Steuerung linearen Kostenrate betrachten und darauf das Minimumprinzip von Pontrjagin anwenden.

Hierzu sei für i=0,1,...,N

$a_i(t)$ Aufenthaltskostenrate im Zeitpunkt t bei i Kunden im System

$b_i(t)$ Faktor für die Servicekostenrate im Zeitpunkt t bei i Kunden im System

$a_i(t)$ und $_i(t)$ seien stetig differenzierbar.

Man hat somit

$$c(t,i,v) = a_i(t) + b_i(t)\, v \quad .$$

Wir führen die Vektoren

$a(t) := (a_0(t), a_1(t), \ldots, a_N(t))'$ und

$b(t,z) := (b_0(t)z_0, b_1(t)z_1, \ldots, b_N(t)z_N)'$, $z \in \mathbb{R}^{N+1}$,

ein und erhalten dann

$$L(t,x,z) = \left[a(t)' + b(t,z)'\right] x + \phi'\left[\Lambda(t) + B(z)\right] x \quad ,$$

$$H(t,x,\psi,z) = L(t,x,z) + \psi'\left[\Lambda(t) + B(z)\right] x \quad .$$

Beachtet man $b(t,z)'x = b(t,x)'z$

und $B(z)x = B(x)z$,

so erhält man

$$H_z = b(t,x)' + (\phi' + \psi')\, B(x)$$

Man erkennt daß in diesem Falle (aufgrund der Linearität von f und L in der Variablen z [1]) H_z unabhängig von z

ist, wodurch sich aus der Minimumbedingung von Satz (5.7) schließen läßt

$$u_i(t) = \begin{cases} \underline{m} & , \text{ falls } H_{z_i} > 0 \\ \overline{m} & , \text{ falls } H_{z_i} < 0 \end{cases} \quad .$$ [2]

Damit hat man allerdings noch keine optimale Kontrolle, da die Minimumbedingung im Falle $H_{z_i} = 0$ eine Bestimmung von $u_i(t)$ nicht ermöglicht.

---

1) D. h. von der Form $f(t,x,z) = f^{(1)}(t,x) + f^{(2)}(t,x)z$; L analog.

2) Da wir uns nur mit optimalen Kontrollen von nun an beschäftigen, verzichten wir auf "*".

Tritt der Fall $H_{z_i}(t,x(t),\psi(t),u(t)) = 0$ nur zu endlich vielen Zeitpunkten ein, so nennt man die optimale Kontrolle u Bang-Bang-Kontrolle:

u_i nimmt nur die Randwerte von U, d. h. $\underline{m}$ und $\overline{m}$ an und springt höchstens endlich oft während des Zeitraums $[0,t_e]$ von einem Wert zum anderen. Es ist ohne Belang, welchen Wert u_i in diesen isolierten Sprungzeitpunkten annimmt. Es ist aber üblich, den Fall $H_{z_i} = 0$ mit einem der beiden anderen zu kombinieren.

Im allgemeinen muß jedoch damit gerechnet werden, daß eventuell sogenannte singular arcs auftreten, d. h. Teilintervalle von $[0,t_e]$ existieren, auf welchen für das eine oder andere i $H_{z_i} = 0$ gilt. Man siehe BELL/JACOBSON, BRYSON/HO und MAN.

Erst in jüngerer Zeit werden Probleme mit singular arcs in der Kontrolltheorie eingehender behandelt (siehe Übersicht von BELL/JACOBSON). Ein Nachprüfen der notwendigen Bedingungen wie etwa der Legendre-Clebsch-Kelley-Bedingung (siehe MAN und BELL/JACOBSON) erscheint im obigen Problem undurchführbar. Außerdem hat man praktisch wenig gewonnen, wenn eine notwendige Bedingung für die Existenz von singular arcs erfüllt ist.

Oftmals kann man jedoch am konkreten Problem wenigstens die Möglichkeit von singular arcs ausschließen.
Man siehe dazu die Beispiele 5.3. und 6.3.

5.3. Beispiele

Wir betrachten zwei Beispiele mit

$$N = 1 \quad \text{und} \quad \lambda(t) = \text{const} > 0 \quad .$$

In beiden Fällen ist auch die Kostenrate unabhängig von der Zeit, so daß f und L zeitunabhängig sind (autonome Probleme).

Während im ersten Beispiel eine möglichst allgemeine Analyse angestrebt ist, dient das zweite nur als illustratives Zahlenbeispiel.

1. Beispiel

Es sei $c(t,i,v) = a\,i + b\,v$, $\Phi_i = F\,i$ für i=0,1 und mit positiven Konstanten a,b und F.

Als System der Zustandswahrscheinlichkeiten hat man

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= -\,p_0 + u_1 p_1 \\ \dot{p}_1 &= \;\;\,p_0 - u_1 p_1 \end{aligned} \qquad p(0) = (p_0(0),p_1(0))' = (1,0)'$$

Wegen $p_0 = 1 - p_1$ ist eine Reduktion auf eine Gleichung möglich. Bei gleichzeitiger Umbenennung $x := p_1$ und $u := u_1$ liefert dies die Bewegungsgleichung

$$\dot{x} = f(t,x,z) = -(\lambda + z)\,x + \lambda \quad , \quad x(0) = 0 \; .$$

Die Servicerate u_0, anzuwenden bei leerem System, hat von vornherein keinerlei Einfluß auf die Bewegungsgleichung. Man kann jedoch auch deren Einfluß auf die Kosten ausschalten, indem man von vornherein $u_0 = \underline{m}$ setzt. Denn es ist klar, daß dies bei der gegebenen Kostenstruktur für eine optimale Kontrolle gilt, einer Struktur, die keine switch-over-Kosten vorsieht. Man erhält (unter Weglassen der Zeitargumente):

$$K(u) = \int_0^{t_e} \left[\, b\underline{m}(1-x) + (a+bu)x + F\dot{x} \,\right] ds \; .$$

Die Lagrangefunktion ist somit

$$L(t,x,z) = (a-b\underline{m}-F\lambda)x + (b-F)zx + b\underline{m} + F\lambda$$

und die Hamilton-Funktion

$$H(t,x,\psi,z) = L(t,x,z) - (\lambda+z)\psi x + \psi\lambda \quad .$$

Adjungierte Gleichung und Transversalitätsbedingung:

$$\dot{\psi} = -H_x = (\lambda+z)\psi - (b-F)z - a + b\underline{m} + F\lambda$$

$$\psi(t_e) = 0$$

Weiter gilt $H_z = (b - F - \psi)\, x.$

H_z ist unabhängig von z, so daß man mit dem Minimumprinzip von Pontrjagin folgendes erhält

$$u(t) \doteq \begin{cases} \underline{m}\ , & \text{falls } (b-F-\psi)x > 0 \\ \bar{m}\ , & \text{falls } (b-F-\psi)x < 0 \end{cases} \quad .$$

Da auf $(0,t_e]$ x stets positiv ist, was man leicht durch formales Lösen der Bewegungsgleichung mit Anfangswert $x(0)=0$ erkennt (siehe etwa WALTER, p.23):

$$x(t) = \exp\Big(\int_0^t (\lambda+z)dr\Big)\Big\{\int_0^t \lambda \exp\Big(\int_0^s (\lambda+z)dr\Big)\, ds\Big\},$$

braucht man zur Bestimmung einer optimalen Kontrolle nur den Ausdruck $(b-F) - \psi$ zu betrachten.

Würde für ein Teilintervall $\psi = (b-F)$ gelten, so wäre dort $\dot{\psi} = 0$, woraus sich $0 = a - b(\lambda+\underline{m}) =: D$ ergäbe.

Im Falle $D \neq 0$ hat man also mit Sicherheit keine singular arcs; und es kann nur endlich viele Zeitpunkte t geben mit $\psi(t) = b - F$, da ψ absolutstetig ist.

Der Fall $D = 0$ klärt sich in den folgenden Rechnungen.

Da die adjungierte Gleichung nicht explizit von x abhängt und ψ an der Stelle $t = t_e$ bekannt ist, nämlich dort den Wert 0 annimmt, kann man von t_e aus "rückwärts" schließen.

Hierzu führen wir eine Zeit-Transformation durch:

$$q := t_e - t \quad ,$$

also eine Zeitumkehr mit Verlagerung des Zeitnullpunktes nach t_e .

Somit $\psi(t) = \psi(t_e - q) =: \overleftarrow{\psi}(q)$ und

$$\frac{d}{dq}\overleftarrow{\psi}(q) = -(\lambda+z)\overleftarrow{\psi}(q) + (b-F)z + a - b\underline{m} - F\lambda \qquad 1)$$

$$\overleftarrow{\psi}(0) = 0 \ .$$

Entsprechend sei $u(t) = u(t_e - q) =: \overleftarrow{u}(q)$.

Als formale Lösung obiger Differentialgleichung bei beliebigem Anfangszeitpunkt q_o und Anfangswert $\overleftarrow{\psi}(q_o)$ erhält man (siehe etwa WALTER, p.23)

$$\overleftarrow{\psi}(q) = \exp\left(-\int_{q_o}^{q}(\lambda+z)dr\right) \cdot \left\{ \overleftarrow{\psi}(q_o) + \int_{q_o}^{q}\left[(b-F)z+a-b\underline{m}-F\lambda\right]\exp\left(\int_{q_o}^{s}(\lambda+z)dr\right) ds \right.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

Fall $b - F = 0$

Man erkennt, daß auf dem q-Intervall $(0,t_e]$

$\overleftarrow{\psi} > 0$, wenn $a - b\underline{m} - F\lambda > 0$

$\overleftarrow{\psi} < 0$, wenn $a - b\underline{m} - F\lambda < 0$

Wir haben $D = a - b(\lambda+\underline{m})$,

wobei für diesen Fall $F = b$ zu beachten ist.

Ist $D = 0$, so hat man $L = \text{const} = b(\lambda+\underline{m})$

---

1) Für die Ableitung von $\overleftarrow{\psi}$ nach q schreiben wir auch $\dot{\overleftarrow{\psi}}$; deren Ableitung nach t werden wir nicht benötigen,

Damit erhält man folgende optimale Kontrollen

$b-F = 0$ und $D < 0$: $u \equiv \underline{m}$
$b-F = 0$ und $D = 0$: jede Kontrolle ist optimal
$b-F = 0$ und $D > 0$: $u \equiv \overline{m}$

Fall $b - F > 0$

Da $\overleftarrow{\psi}(0) = 0$ und $(b-F) - \overleftarrow{\psi}$ stetig ist, gibt es ein maximales q-Intervall $[0,q_1)$ mit $(b-F) - \overleftarrow{\psi} > 0$ darauf.

Für eine optimale Kontrolle gilt somit auf diesem Intervall $u = \underline{m}$.

Setzt man dies in die formale Lösung ψ ein, so erhält man

$$\overleftarrow{\psi}(q) = \frac{a - F(\lambda+\underline{m})}{\lambda+\underline{m}} \left(1 - e^{-(\lambda+\underline{m})q} \right) .$$

Daraus erkennt man, daß ψ niemals den Wert $(b-F)$ erreicht, wenn $\frac{a - F(\lambda+\underline{m})}{\lambda+\underline{m}} \leq (b-F)$, d. h. $D \leq 0$ gilt.

Ist andererseits $D > 0$, so erreicht ψ den Wert $(b-F)$ wenn das Intervall $[0,t_e]$ nur groß genug ist.

Den Umschaltzeitpunkt q_1 erhält man aus der Bedingung

$$\overleftarrow{\psi}(q_1) = (b-F) ,$$

nämlich

$$q_1 = \frac{1}{\lambda+\underline{m}} \ln \frac{a - F(\lambda+\underline{m})}{D} .$$

Eine weitere (zweite) Umschaltung ist keinesfalls mehr möglich, denn für $q > q_1$ gilt $\overleftarrow{\psi}(q) > (b-F)$.

Am einfachsten zeigt man dies durch Umformen der Differentialgleichung für mit $z=m$ auf

$$\overleftarrow{\psi} - (b-F) = -(\lambda+\overline{m}) \left(\overleftarrow{\psi} - (b-F) \right) + D , \quad \overleftarrow{\psi}(q_1) - (b-F) = 0.$$

Als Lösung erhält man

$$\overleftarrow{\psi}(q) - (b-F) = \frac{D}{\lambda+\overline{m}} \left(1 - e^{-(\lambda+\overline{m})(q-q_1)} \right) .$$

Fall $b - F < 0$

Dieser wird vollkommen analog zum vorangehenden behandelt. Die Ergebnisse erscheinen in der folgenden Tabelle, die alle Fälle zusammenfassend wiedergibt.

Man hat für das 1. Beispiel die folgenden optimalen Kontrollen:

D \ b − F	< 0	$= 0$	> 0
< 0	$\underline{m}\ I(t<t_e-\tilde{q}_1) + \bar{m}\ I(t\geq t_e-\tilde{q}_1)$	$\underline{m}$	$\underline{m}$
$= 0$	$\bar{m}$	beliebig	
> 0		$\bar{m}$	$\bar{m}\ I(t<t_e-q_1) + \underline{m}\ I(t\geq t_e-q_1)$

Dabei ist

$$D = a - b\,(\lambda + \underline{m})$$

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{\lambda + \underline{m}} \ln \frac{a - F\,(\lambda + \bar{m}) + b\,(\bar{m} - \underline{m})}{D}$$

$$q_1 = \frac{1}{\lambda + \underline{m}} \ln \frac{a - F\,(\lambda + \underline{m})}{D}$$

Aufgrund der früheren Kapitel wissen wir, daß die Markov-Steuerung "Wähle $\underline{m}$, wenn kein Kunde im System, und wähle die in obiger Tabelle gegebene Servicerate, wenn ein Kunde im System ist." optimal in der Klasse aller zugelassenen Steuerungen ist. ▷

2. Beispiel

Ist die Kostenrate in der Steuerung nicht-linear, so erhält man im allgemeinen keine Bang-Bang-Kontrollen.

Wir betrachten

$$c(t,i,v) = a\,i + b\,v^2 \qquad \Phi_i = F\,i \quad , \; i=0,1$$

mit den positiven Konstanten a,b und F.

Man beachte, daß die Kostenrate bezüglich der Steuerung konvex ist.

Im weiteren beschränken wir uns auf das Zahlenbeispiel

$$\lambda = 1 \qquad \underline{m} = 0 \qquad \overline{m} = 2 \qquad a = 2 \qquad c = 1 \qquad F = 2$$

Damit erhalten wir (Reduktion auf eine Gleichung und Umbenennung wie im 1. Beispiel)

$$H(t,x,\psi,z) = (z-2-\psi)zx - \psi x + \psi + 2$$

$$\dot{\psi} = -H_x = (1+z)\psi - z(z-2) \qquad \psi(t_e) = 0$$

$$H_z = (2z-2-\psi)x$$

Da x auf $(0,t_e]$ positiv (siehe 1. Beispiel), liefert das Minimumprinzip von Pontrjagin (man betrachte H_z)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } \psi < -2 \\ 1 + \psi/2 & , \text{ wenn } -2 \le \psi \le 2 \\ 2 & , \text{ wenn } \psi > 2 \end{cases}$$

Man beachte $u(t_e) = 1$, wegen $\psi(t_e) = 0$.

Wir stellen nun wiederum eine "Rückwärtsbetrachtung" von $t = t_e$ aus an.

Wie im ersten Beispiel führen wir die q-Zeit ein, d. h.

$q := t_e - t$ und setzen $\overleftarrow{\psi}(q) := \psi(t_e - q)$, $\overleftarrow{u}(q) := u(t_e - q)$.

Man erhält somit aus der adjungierten Gleichung

$$\dot{\overleftarrow{\psi}} = -(1+z)\overleftarrow{\psi} + z(z-2) \qquad \overleftarrow{\psi}(0) = 0$$

Da $\overleftarrow{\psi}$ stetig ist, gibt es ein maximales q-Intervall $[0,q_1)$, auf welchem $\overleftarrow{\psi}$ innerhalb $[-2,2]$ bleibt, d. h. hier ist

$$\overleftarrow{u}(q) = 1 + \overleftarrow{\psi}(q)/2 .$$

Setzt man dies in obige Differentialgleichung ein, so erhält man eine vom Riccatischen Typ

$$\dot{\overleftarrow{\psi}} = -(\overleftarrow{\psi}^2/4) - 2\overleftarrow{\psi} - 1 , \qquad \overleftarrow{\psi}(0) = 0 .$$

Als Lösung verifiziert man

$$\overleftarrow{\psi}(q) = - \frac{\tanh(\sqrt{3}/2)q}{(\sqrt{3}/2) + \tanh(\sqrt{3}/2)q} .$$

Da für alle $q \in \mathbb{R}_+$ $\quad -(\sqrt{3}/2 + 1)^{-1} < \overleftarrow{\psi}(q) < 0$,

wobei $\lim_{q\to\infty} \overleftarrow{\psi}(q) = -(\sqrt{3}/2 + 1)^{-1} > -2$

wird stets mit

$$\overleftarrow{u}(q) = 1 + \overleftarrow{\psi}(q)/2$$

kontrolliert.

Als optimale Kontrolle für das 2. Beispiel erhält man somit

$$u(t) = \frac{\sqrt{3} + \tanh(\sqrt{3}/2)(t_e - t)}{\sqrt{3} + 2\tanh(\sqrt{3}/2)(t_e - t)} .$$

Ist zum Zeitpunkt t ein Kunde im System, so hat man also die Servicerate u(t) zu wählen. Ist kein Kunde im System, so wählt man die Servicerate $\underline{m}$.

Aufgrund früherer Ergebnisse wissen wir, daß diese Markov-Steuerung optimal in der Klasse aller zulässiger Steuerungen ist.

▷

6. Methoden der deterministischen Kontrolltheorie II : Minimumprinzip von Bellman

Wenn das Minimumprinzip von Pontrjagin auch schwerlich zur expliziten Gewinnung optimaler Kontrollen oder allgemeiner Aussagen über deren Gestalt (etwa Bang-Bang) herangezogen werden kann, so ist es doch oftmals in konkreten Fällen, also bei Vorliegen konkreter Zahlenwerte, möglich, das Minimumprinzip von Pontrjagin mit numerischen Methoden unter Zuhilfenahme elektronischer Großrechner zur approximativen Bestimmung der optimalen Service-Intensität eines Wartesystems zu verwenden, zumindest bei nicht zu großem N und bei linearem Kostenansatz.

Zur deterministischen Kontrolltheorie gibt es zwei duale Zugänge. Dies sind die im Pontrajaginschen Minimumprinzip gipfelnden Variationsmethoden und das dynamische Programmieren.
Hier soll nun dieser zweite Zugang, das dynamische Programmieren, auf unser Optimierungsproblem (D) Anwendung finden.
Dabei steht der Begriff der Wertfunktion im Vordergrund, wenn auch nicht primär deren Ermittlung von Interesse ist.
Die Wertfunktion (des deterministischen Modells) gibt in Abhängigkeit vom momentanen Zeitpunkt und Zustand das Infimum der im noch verbliebenen Planungszeitraum anfallenden Kosten an, genommen über alle für diesen restlichen Zeitraum zulässigen Kontrollen.

Mit der Transformation des Problems (S^M) in das Problem (D) wurde die Anwendung nicht-probabilistischer Methoden möglich. Wenn auch in diesem Kapitel wiederum eine solche Methode voransteht, so gelingt es uns doch, aus dem (deterministischen) Minimumprinzip von Bellman ein anderes Minimumprinzip (Satz(6.8)) abzuleiten, welches stochastischen Charakter hat und einen direkten Bezug zum Problem (S^M) aufweist.
Von praktischem Vorteil ist, daß die aus diesem Minimumprinzip abgeleiteten Differentialgleichungssysteme nicht zu Randwertproblemen führen, wie das im Zusammenhang mit dem Pontrjaginschen Minimumprinzip der Fall war.

6.1. Deterministische Wertfunktion, Minimumprinzip von Bellman, partielle Differentialgleichung vom Hamilton-Jacobi'schen Typ

Wir gehen von der Situation des Problems (D) aus. Dabei mögen die Bedingungen von Satz (5.4) erfüllt sein.

Für die im 5. Kapitel durchgeführten Betrachtungen war es möglich, die Kostenbeträge ϕ_i in die Lagrange-Funktion aufzunehmen, und zwar aufgrund von $\phi_o = 0$ und $x(0) = (1,0,\ldots,0)'$. Dies ist hier nicht möglich.

Wir setzen für $t \in [0,t_e]$

$$(6.1) \quad \mathcal{K}(t) = \left\{ u : \text{Es gibt } v \in \mathcal{K} \text{ mit } u = v\big|_{[t,t_e]} \right\}$$

Sei $y \in [0,1]^{N+1}$ und $t \in [0,t_e]$, so hat die Bewegungsgleichung auch für den Anfangswert $x(t) = y$ genau eine Lösung. Man beachte, daß vorerst nicht $\sum_0^N y_i = 1$ vorausgesetzt ist.

Für $t \in [0,t_e]$ und $y \in [0,1]^{N+1}$ sei

$$(6.2) \quad W(t,y) = \inf_{u \in \mathcal{K}(t)} \left\{ \int_t^{t_e} \sum_{i=0}^{N} c(s,i,u_i(s)) x_i(s)\, ds + \sum_{i=0}^{N} \phi_i\, x_i(t_e) \right\},$$

wobei x jeweils die zu u gehörige Trajektorie mit Anfangswert $x(t) = y$ ist.

W bezeichnet man als Wertfunktion oder einfach als Wert (des Problems (D)). Für gewisse Anfangszustände y wird sich eine naheliegende "stochastische" Interpretation ergeben (siehe S.90).

Es gilt offensichtlich

$$W(t,y) = \inf_{u\in\mathcal{K}(t)} \int_t^{t_e} \Big[\sum_{i=0}^{N} c(s,i,u_i(s))x_i(s) + \phi_i f_i(s,x(s),u(s))\Big]ds + \sum_{i=0}^{N} \phi_i y_i$$

Mit der Lagrange-Funktion von Problem (D)

$$L(s,x,z) = \sum_{i=0}^{N} \big[c(s,i,z_i)x_i + \phi_i f_i(s,x,z)\big]$$

erhalten wir also

$$(6.3) \qquad W(t,y) = \inf_{u\in\mathcal{K}(t)} \int_t^{t_e} L(s,x(s),u(s))ds + \sum_{i=0}^{N} \phi_i y_i .$$

Aus dem Bellman'schen Minimumprinzip werden wir die für das Weitere wichtige partielle Differentialgleichung vom Hamilton-Jacobi'schen Typ herleiten. Das Minimumprinzip, auch als Bellman'sches Optimalitätsprinzip bekannt, muß allerdings erst als für unseren Fall gültig nachgewiesen werden.
Wir benötigen dazu die Differenzierbarkeit von W.

(6.4) Lemma (Differenzierbarkeit der Wertfunktion)
Die Wertfunktion W ist auf $[0,t_e]\times[0,1]^{N+1}$ mit Ausnahme einer Lebesgue-Nullmenge differenzierbar.

Zum Beweis siehe F/R IV, Theorem 4.2.
Dabei hat man nur folgendes zu berücksichtigen:
f ist stetig differenzierbar auf der kompakten Menge $[0,t_e] \times [0,1]^{N+1} \times [m,m]^{N+1}$, W ist auf der konvexen und kompakten Menge $[0,t_e] \times [0,1]^{N+1}$ gegeben.

1) BELLMAN ,2.8.: "Principle of Optmality: An optimal policy has the property that whatever the initial state and the initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."

Die Umformung der Kosten auf die entsprechende Form ist unproblematisch (F/R II, § 4), so daß deren lokale Lipschitz-Eigenschaft aus der Stetigkeit von L folgt.

(6.5) Lemma (Minimumprinzip von Bellman)

a) Sei $u \in \mathcal{U}$ und x zugehörige Trajektorie,[1] dann gilt für $t \in [0, t_e)$ und $h > 0$ mit $t + h \leq t_e$

$$W(t, x(t)) - \sum_{i=0}^{N} \phi_i \, x_i(t)$$

$$\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))ds + W(t+h, x(t+h)) - \sum_{i=0}^{N} \phi_i \, x_i(t+h) \, .$$

b) Ist u optimal in $\mathcal{U}$, so gilt in a) das Gleichheitszeichen.

Beweis:

a) Sei $u \in \mathcal{U}$ und $\tilde{\tilde{u}} \in \mathcal{U}(t+h)$ und x bzw. $\tilde{\tilde{x}}$ zugehörige Trajektorien auf $[0, t_e]$ bzw. $[t+h, t_e]$ mit $x(t+h) = \tilde{\tilde{x}}(t+h)$.

Definiere $u \in \mathcal{U}(t)$ durch die Verkettung

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} u(s) & \text{für} \quad s \in [t, t+h) \\ \tilde{\tilde{u}}(s) & \text{für} \quad s \in [t+h, t_e] \end{cases}$$

Dann ist bei Verwendung der Kontrolle $\tilde{u}$

$$W(t, x(t)) - \sum_{i=0}^{N} \phi_i x_i(t) \leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))ds + \int_{t+h}^{t_e} L(s, \tilde{\tilde{x}}(s), \tilde{\tilde{u}}(s))ds$$

---

1) Es ist $\mathcal{U} = \mathcal{U}(0)$ und hier ist als Anfangswert $x^0 = (1, 0, \ldots, 0)'$ zu betrachten.

Nimmt man auf der rechten Seite das Infimum über alle $u \in \mathcal{U}(t+h)$, so hat man die Behauptung.

b) Sei u optimal in $\mathcal{U}$.
Man beachte im folgenden $\sum_{i=0}^{N} \Phi_i \, x_i^o = 0$, da $\Phi_o = 0$ und $x_i^o = 0$ für $i \geq 1$.
Es gilt

$$\int_t^{t+h} L(s,x(s),u(s)ds + W(t+h,x(t+h)) - \sum_{i=0}^{N} \Phi_i \, x_i(t+h) \qquad (A)$$

$$\leq \int_t^{t+h} L(s,x(s),u(s))ds + \int_{t+h}^{t_e} L(s,x(s),u(s))ds$$

$$\leq \int_t^{t_e} L(s,x(s)u(s))ds$$

$$\leq W(0,x(0)) - \int_o^t L(s,x(s),u(s))ds$$

$$\leq W(t,x(t)) - \sum_{i=0}^{N} \Phi_i \, x_i(t) \qquad (B)$$

$$\leq \int_t^{t+h} L(s,x(s),u(s))ds + W(t+h,x(t+h)) - \sum_{i=0}^{N} \Phi_i \, x_i(t+h) \qquad (A)$$

Dabei wurde nur bei den beiden letzten Abschätzungen Teil a) benutzt, während in die ersten nur die Definition des Wertes eingeht. Aus $A \leq B \leq A$ folgt die Behauptung. ▷

(6.6) Lemma (partielle Differentialgleichung für die Wertfunktion)

a) Sei $t \in [0,t_e]$ und $y \in [0,1]^{N+1}$, dann gilt für alle $z \in U^{n+1}$

$$W_t + (W_y - \Phi') \, f(t,y,z) + L(t,y,z) \geq 0 \quad .$$

b) Ist u optimal in $\mathcal{U}$, so erfüllt u zusammen mit der zugehörigen Trajektorie die part. Differentialgleichung

$$\min_{z \in U^{N+1}} \{ W_t + (W_y - \Phi') \, f(t,y,z) + L(t,x,z) \} = 0 \, .$$

Beweis:

a) Sei $t \in (0,t_e)$ und $y \in (0,1)^{N+1}$.
Es genügt offenbar, den Beweis für diese Werte zu führen, da alle Ausdrücke auf der linken Seite stetig sind.

Sei $z \in U^{N+1}$, dann wählen wir eine auf einem Intervall $[t,t+h]$ konstante, nämlich den Wert z annehmende Kontrolle $u \in \mathcal{U}(t)$. x sei die zugehörige Trajektorie mit $x(t) = y$.

Dann erhalten wir nach Teil a) von Lemma (6.5)

$$0 \leq W(t+h,x(t+h)) - W(t,x(t)) - \sum_{i=0}^{N} \phi_i(x_i(t+h)-x_i(t)) + \int_t^{t+h} L(s,x(s),z)ds$$

Dividiert man beide Seiten durch h und läßt h gegen 0 gehen, so erhält man die Behauptung, da alle Differentialquotienten existieren. Man berücksichtige dabei die Anwendbarkeit der Kettenregel in bezug auf W (wegen der Differenzierbarkeit von W) und die Stetigkeit der Lagrangefunktion (zusammen mit der von x(s)).

b) Dieser Teil ergibt sich analog zu a) unter entsprechender Verwendung von Teil b) des Lemmas (6.5). ▷

6.2. Minimumprinzip zur Bestimmung optimaler Markovscher Service-Intensitäten

Es wird weiterhin das Problem (D) unter den Bedingungen von Satz (5.4) betrachtet.

Die Lagrange-Funktion L läßt sich in der Form

$$L(t,x,z) = l(t,z)' \, x$$

mit einem Vektor $l(t,z)$ schreiben (siehe (4.6)).

Dies zusammen mit der zwischen Problem (S^M) und Problem (D) bestehenden Beziehung ermöglicht das folgende Lemma.

Zuvor werden Vektoren $e_i \in \mathbb{R}^{N+1}$, $i=0,1,\ldots,N$ definiert:
Es sei $e_0 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_1 = (0,1,0,0,\ldots,0)$, usw.

(6.7) Lemma

Für $t \in [0,t_e]$ und $y \in [0,1]^{N+1}$ mit $\sum_{i=0}^{N} y_i = 1$ gilt

$$W(t,y) = \sum_{i=0}^{N} W(t,e_i)\, y_i \quad .$$

Beweis:

Es ist $$W(t,y) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \int_t^{t_e} l(s,u(s))'x(s)ds + \sum_{i=0}^{N} \Phi_i y_i \, ,$$

wobei x die jeweils eindeutige Lösung von

$$\dot{x}(s) = B(s,u(s))\, x(s)$$
$$x(t) = y$$

ist (siehe S.63).

Wir betrachten gleichzeitig die Lösungen $x^{(i)}$ mit Anfangswert $x^{(i)}(t) = e_i$.

Zwischen x und den $x^{(i)}$ besteht nun die Beziehung

$$x(s) = \sum_{i=0}^{N} y_i \, x^{(i)}(s) \quad ,$$

denn

$$\dot{x}(s) = \sum_{i=0}^{N} y_i \, \dot{x}^{(i)}(s) = B(s,u(s)) \sum_{i=0}^{N} y_i \, x^{(i)}(s)$$

$$= B(s,u(s)) \, x(s) \quad .$$

Somit erhält man

$$W(t,y) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \int_t^{t_e} l(s,u(s))' x(s) \, ds + \sum_{i=0}^{N} \Phi_i \, y_i$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left[\inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \int_t^{t_e} l(s,u(s))' x^{(i)}(s) \, ds + \Phi_i \right] y_i$$

$$= \sum_{i=0}^{N} W(t,e_i) \, y_i \quad . \triangleright$$

Im deterministischen Modell (Problem (D)) stellt der Zustand y einen Vektor dar, der die Zustandswahrscheinlichkeiten des stochastischen Modells (Problem (S^M)) repräsentiert. Insbesondere belegt der Vektor e_i den Wartesystemzustand i (i Einheiten im System) mit der Wahrscheinlichkeitsmasse 1. $W(t,e_i)$ stellt nun offenbar in Abhängigkeit vom momentanen Zeitpunkt t und (Wartesystem-)Zustand i den "Markov-Wert" des zu steuernden Wartesystems dar; er ist das Infimum des Erwartungswertes der im noch verbliebenen Planungszeitraum anfallenden Kosten, genommen über alle für den restlichen Zeitraum zulässigen Markov-Kontrollen.
Auf den entsprechenden Wertbegriff ohne die Einschränkung auf die Markov-Kontrollen, soll hier nicht weiter eingegangen werden, da wir uns mit der Transformation des Problems (S^M) in das Problem (D) für deterministische Methoden zur Bestimmung optimaler Steuerungen entschieden haben.
Es soll nur bemerkt werden, daß in diesem Kapitel im Gegensatz zum vorangehenden eine deterministische Hilfsgröße wie der "Wert" einen Bezug zu einem stochastischen Äquivalent hat, während dies bei der Hilfsgröße "Kozustand" nicht erkennbar ist.

Wir definieren für $t \in [0,t_e]$, $i=0,1,\ldots,N$ und $z \in U^{N+1}$
$V_i(t) := W(t,e_i)$ und $G_i(t,z)$ durch:

$$G_0 := \dot{V}_0 + \lambda(V_1 - V_0) + c(t,0,z_0)$$

und für $1 \leq i \leq N-1$

$$G_i := \dot{V}_i + \lambda(V_{i+1} - V_i) + z_i (V_{i-1} - V_i) + c(t,i,z_i)$$

$$G_N := \dot{V}_N + z_N (V_{N-1} - V_N) + c(t,N,z_N)$$

Damit formulieren wir den

(6.8) Satz

a) Sei $t \in [0,t_e]$, dann gilt für alle $z \in U^{N+1}$

$$G_i(t,z_i) \geq 0 \qquad i=0,1,\ldots,N.$$

b) Ist u optimal in $\mathcal{K}$, so gilt für alle $t \in [0,t_e]$

$$G_i(t,u_i(t)) = 0 \qquad i=0,1,\ldots,N.$$

Bevor wir den Satz beweisen, einige

(6.9) Bemerkungen

a) Man erkennt den Satz als "Minimumprinzip", wenn Teil b) folgendermaßen formuliert wird:

Ist u optimal in $\mathcal{K}$, dann genügt für $i=0,1,\ldots,N$ u_i der Gleichung

$$\min_{v \in U} G_i(t,v) = 0 \quad .$$

b) Will man dies Minimumprinzip praktisch nutzen, dann wird man so vorgehen:
Man versucht, aus "$\min_{v \in U} G_i(t,v) = 0$" $u_i(t)$ in

Abhängigkeit von t und den $V_i(t)$ zu erhalten. Anschließend bemüht man sich um eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$G_i(t,u_i(t)) = 0 \qquad i=0,1,\ldots,N$$

für die V_i . Dabei ist $V_i(t_e) = \Phi_i$ zu beachten.

Beweis des Satzes (6.8):

a) Aus Teil a) von Lemma (6.6) und mit Lemma (6.7) erhalten wir für jedes

$$y \in [0,1]^{N+1} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{N} y_i = 1$$

$$\sum_{i=0}^{N} W_t(t,e_i)y_i \;+\; \sum_{i=0}^{N} \left[W(t,e_i) - \Phi_i \right] f_i(t,y,z)$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} \left[c(t,i,z_i)y_i + \Phi_i f_i(t,y,z) \right] \geq 0 \ .$$

Mit $W(t,e_i)=V_i(t)$ und $f_i(t,y,z)=(B(t,z)y)_i$ erhält man

$$\sum_{i=0}^{N} \left[\dot{V}_i(t)\, y_i \;+\; V_i(t)\, f_i(t,y,z) \;+\; c(t,i,z_i)\, y_i \right] =$$

$$\sum_{i=0}^{N} G_i(t,z_i)\, y_i \geq 0 \ .$$

Mit $y = e_i$ bekommt man so $G_i(t,z_i) \geq 0$ für $i=0,1,\ldots,N$.

b) Entsprechend zeigt man mit Teil b) von Lemma (6.6), daß für u optimal in $\mathcal{K}$ mit zugehöriger Trajektorie x $\sum_0^N G_i(t,u_i(t))x_i(t) = 0$.

Da λ positiv ist, ist auch jedes x_i auf $(0,t_e]$ positiv. $x_i(0)$ kann für jedes i positiv gewählt werden, so daß man erhält:

$G_i(t,u_i(t)) = 0$ für $t \in [0,t_e]$, $i=0,1,\ldots,N$. ▷

6.3 Beispiel

Wir wollen hier den Satz (6.8) anwenden auf ein Problem (D) mit linearem Kostenansatz

$$c(t,i,v) = a\,i + b\,v\,, \qquad \phi_i = i\,F$$

mit den positiven Konstanten a,b und F.

Außerdem sei $\lambda(t) = \text{const.}$

Da eine allgemeine Analyse wie im 1. Beispiel von 5.3. als nicht möglich erscheint (explizite Berechnungen sind dann bei beliebigem N nicht durchführbar), beschränken wir uns hier auf

$$b - F > 0\,, \qquad a - b\lambda > 0\,, \qquad \underline{m} = 0.$$

Man erhält

$$\min_{z_0 \in U} \{\, \dot{V}_0 + \lambda(V_1 - V_0) + bz_0 \,\} = 0,$$

woraus sich erwartungsgemäß

$$u_0 = \underline{m} = 0 \qquad \text{ergibt.}$$

Für $1 \le i \le N-1$ ist

$$\min_{z_i \in U} \{\, \dot{V}_i + \lambda(V_{i+1} - V_i) + ai + [(V_{i-1} - V_i) + b]\, z_i \,\} = 0.$$

Und

$$\min_{z_N \in U} \{\, \dot{V}_N + aN + [(V_{N-1} - V_N) + b]\, z_N \,\} = 0\,.$$

Wegen $V_i(t_e) = iF$ und $b - F > 0$ für $i=0,1,\ldots,N$, nehmen alle u_i "vor t_e" den Wert $\underline{m} = 0$ an.

Wir führen nun wieder die übliche "Rückwärtsbetrachtung" wie in den Beispielen 5.3. mit Einführung der q-Zeit durch:

$$q := t_e - t\,, \qquad \overleftarrow{V}_i(q) := V_i(t_e - q)\,, \qquad \overleftarrow{u}_i(q) := u_i(t_e - q).$$

In den folgenden Überlegungen, die nur in q-Zeit geschehen, wird das Zeitargument q weggelassen und es sei $\frac{d}{dq}\overleftarrow{V}_i = \dot{\overleftarrow{V}}_i$ geschrieben.

Mit $\Delta_i := \overleftarrow{V}_i - \overleftarrow{V}_{i-1}$ für $i=1,2,\ldots,N$

erhalten wir aus der Minimumbedingung folgendes Differentialgleichungssystem

$$(6.9)\qquad \begin{aligned} \dot{\overleftarrow{V}}_o &= \lambda \Delta_1 \\ \dot{\overleftarrow{V}}_i &= \lambda \Delta_{i+1} + ia\,, \qquad 1\leq i\leq N-1\,, \\ \dot{\overleftarrow{V}}_N &= Na\,. \end{aligned}$$

Durch entsprechende Subtraktionen ergibt sich daraus das System

$$(6.10)\qquad \begin{aligned} \dot{\Delta}_i &= -\lambda\Delta_i + \lambda\Delta_{i+1} + a\,, \qquad 1\leq i\leq N-1, \\ \dot{\Delta}_N &= -\lambda\Delta_N + a\,. \end{aligned}$$

Eine leichte Umformung führt zu

$$(6.10')\qquad \begin{aligned} \dot{\Delta}_i &= -\lambda(\Delta_i - F) + \lambda(\Delta_{i+1} - F) + a\,, \quad 1\leq i\leq N-1\,, \\ \dot{\Delta}_N &= -\lambda(\Delta_N - F) + a - F\lambda\,. \end{aligned}$$

Die Systeme (6.10) und (6.10') ließen sich Gleichung für Gleichung, und zwar mit der N-ten beginnend, lösen.
Das von uns angestrebte Ergebnis, nämlich eine allgemeine Aussage über die "Gestalt" einer optimalen Steuerung, erhalten wir jedoch durch folgende Betrachtungen.

Beachtet man $\Delta_i(0) = F$ und $\dot{\overbrace{\Delta_i - F}} = \dot{\Delta}_i$, $1\leq i\leq N$,

so hat man für die linearen Differentialgleichungen aus (6.10') die Darstellungsmöglichkeit (siehe etwa WALTER, p.23)

$$\Delta_i(q) - F = \int_o^q \left[\lambda\Delta_{i+1}(s) + a - F\lambda\right] \exp\left[-\lambda(q-s)\right] ds$$

auf dem q-Intervall $[0,t_e]$. Man setze dabei $\Delta_{N+1} := 0$.

Hieraus ist ersichtlich, daß für $1 \leq i \leq N$ und $q \in (0, t_e]$ gilt

$$\Delta_i(q) - F > 0 .$$

(Man beginne mit der Gleichung i=N und berücksichtige die Positivität des Integranden.)

Nun erhält man durch Differentiation der obigen Darstellungsmöglichkeit für $1 \leq i \leq N$ und $q \in [0, t_e]$

$$\dot{\Delta}_i(q) > 0 .$$

Wir benötigen noch ein weiteres Differentialgleichungssystem, welches wir durch entsprechende Subtraktionen aus (6.10) erhalten:

$$\dot{\overbrace{\Delta_{i-1} - \Delta_i}} = -\lambda(\Delta_{i-1} - \Delta_i) + \lambda(\Delta_i - \Delta_{i+1}) \quad , \; 2 \leq i \leq N-1,$$

$$\dot{\overbrace{\Delta_{N-1} - \Delta_N}} = -\lambda(\Delta_{N-1} - \Delta_N) + \lambda \Delta_N .$$

Und als Darstellungsmöglichkeit hat man hier

$$(\Delta_{i-1} - \Delta_i)(q) = \int_0^q \lambda(\Delta_i - \Delta_{i+1})(s) \exp[-\lambda(q-s)] \, ds ,$$

auf dem q-Intervall $[0, t_e]$, wobei wiederum $\Delta_{N+1} := 0$.

Vollkommen analog wie oben zeigt man hier für $2 \leq i \leq N$ und $q \in (0, t_e]$

$(\Delta_{i-1} - \Delta_i)(q) > 0$, das heißt $\Delta_{i-1}(q) > \Delta_i(q)$.

Somit hat man für die optimale Steuerung folgendes Ergebnis: Eine Umschaltung, d. h. ein Springen der Service-Intensität $\overleftarrow{u}_i$ von 0 auf die maximale Rate $\overline{m}$, erfolgt in dem Moment, sobald Δ_i den Funktionswert b ($> F$) annimmt. Dies tritt auf alle Fälle ein, wenn der Zeithorizont nur lange genug ist, da $\dot{\Delta}_i > 0$ gilt.

Kommen nun die jeweiligen Umschaltungen überhaupt aufgrund der Länge des Zeithorizontes vor, so springt zunächst (rückwärts von t_e aus betrachtet) $\overleftarrow{u}_1$ von 0 auf $\overline{m}$, dann $\overleftarrow{u}_2$, usw.

Ist aber einmal eine Umschaltung bei $\overleftarrow{u}_i$ erfolgt, so behält $\overleftarrow{u}_i$ diese maximale Rate weiterhin (rückwärts gesehen) bei.

Dies erkennt man wie folgt.

Zunächst findet die Umschaltung bei $\overleftarrow{u}_1$ statt.
Die Minimumbedingung liefert dann für $\overleftarrow{V}_1$ die neue Differentialgleichung

$$\dot{\overleftarrow{V}}_1 = \lambda \Delta_2 + a - \overline{m} \Delta_1 + b\overline{m} \quad ,$$

wogegen die übrigen weiterhin bestehen bleiben.

In den Systemen (6.10) und (6.10') ist jeweils die erste Gleichung entsprechend zu ersetzen durch

$$\dot{\Delta}_1 = -(\lambda+\overline{m})\,\Delta_1 + \lambda \Delta_2 + a + b\overline{m} \quad , \quad \text{bzw.}$$

$$\dot{\overbrace{\Delta_1 - b}} = -(\lambda+\overline{m})(\Delta_1 - b) + \lambda \Delta_2 + (a - b\lambda) \; .$$

Damit ergibt eine vollkommen analoge Abschätzung, wie sie für das ursprüngliche System (6.10') durchgeführt wurde:

$$\Delta_1(q) > b \quad \text{für} \quad q \in (t_o, t_e] \; ,$$

wobei t_o den q-Zeitpunkt der Umschaltung von $\overleftarrow{u}_1$ bezeichnet.

Man verfährt sukzessive für i=2,3,...,N, wobei die bereits ersetzten Gleichungen jeweils beibehalten werden. ▷

Anhang 1 : Hinreichende Bedingung für die Martingaleigenschaft eines stochastischen Prozesses

Auf S. 41 wird folgende Behauptung benötigt.

Behauptung

Sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein beliebiger W-Raum und $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration von $(\Omega,\mathcal{F})$.
(X_t) sei ein adaptierter meßbarer Prozeß, der in dem Sinne integrierbar ist, daß gilt:

$$X_t \text{ ist integrierbar für jedes } t \in \mathbb{R}_+ ,$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} E|X_t| < \infty \quad .$$

Dann ist (X_t) ein $(P,\mathcal{F}_t)$-Martingal, wenn für jede endliche $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit T

$$E\, X_T = E\, X_0 \quad .$$

Beweis:

Da (X_t) meßbar und T eine endliche Stopzeit ist, ist X_T auf alle Fälle eine Zufallsvariable, so daß $E\, X_T$ überhaupt gebildet werden kann.

Angenommen (X_t) ist kein Martingal, so gibt es - wegen der Integrierbarkeit von (X_t) - $s_o, t_o \in \mathbb{R}_+$ mit $s_o < t_o$

und $P(N) > 0$ mit $N := \{ E(X_{t_o} \mid \mathcal{F}_{s_o}) \neq X_{s_o} \}$.

O.B.d.A. sei $P(N_1) > 0$ mit $N_1 := \{ E(X_{t_o} \mid \mathcal{F}_{s_o}) > X_{s_o} \}$.

Definiere $T := s_o \chi_{N_1} + t_o \chi_{N_1^c}$.

T ist tatsächlich eine Stopzeit; man beachte $N_1 \in \mathcal{F}_{s_o}$.

Man erhält nun:

$$E\, X_T = E(\chi_{N_1} X_{s_o}) + E(\chi_{N_1^c} X_{t_o})$$

$$< \quad E(\chi_{N_1} \, E(X_{t_o} | \mathcal{F}_{S_o})) \quad + \quad E(\chi_{N_1^c} \, X_{t_o})$$

$$= \quad E(\chi_{N_1} \, X_{t_o}) \quad + \quad E(\chi_{N_1^c} \, X_{t_o})$$

$$= \quad E \, X_{t_o}$$

Damit hat man einen Widerspruch, da $E \, X_T = E \, X_o = E \, X_{t_o}$ gelten müßte. $\triangleright$

Zur Anwendung auf S. 41 setzen wir für $t \in \mathbb{R}_+$

$$M_t := \quad Q_t^+ \; - \; \int_o^t \lambda_r \, dr \quad .$$

Für jedes $z \in \mathbb{R}_+$ ist offensichtlich der durch Stoppen mit der (konstanten) Stopzeit z aus (M_t) erhaltene Prozeß $(M_{z \wedge t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein adaptierter meßbarer und im obigen Sinne integrierbarer Prozeß.

Man berücksichtige nun $E \, M_o = 0$ und die Tatsache, daß (M_t) genau dann ein Martingal ist, wenn für jedes $z \in \mathbb{R}_+$ $(M_{z \wedge t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Martingal ist.

Die Bedingung $E \, X_T = E \, X_o$ in der Behauptung ist unter schwachen Zusatzvoraussetzungen für ein Martingal auch notwendig. Dies folgt aus dem Stopsatz für Martingale, siehe MEYER,VI T 13.

Anhang 2

Die hier angegebene Differentialungleichung findet auf S.55,56,57 Verwendung. Sie ist ohne größere Schwierigkeiten aus SZARSKI , Theorem 16.2, abzuleiten.

Wir gehen von einem Differentialgleichungssystem aus, das wir als unendliches formulieren, das aber auch endlich sein kann:

$n \in \mathbb{N}_0, \qquad \dot{x}_n = f_n(t,x_0,x_1,\ldots) \quad , \quad t \in \mathbb{R}_+$

Jedes $f_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle die sog. Caratheodory-Bedingungen:

a) f_n sei stetig in $(x_0,x_1,\ldots)$, d. h. bei festem Wert t gehe $f_n(t,x_0,x_1,\ldots)$ gegen $f_n(t,x_0^o,x_1^o,\ldots)$, falls für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ x_i gegen x_i^o geht.

b) Für feste Werte $x_0,x_1,\ldots$ sei f_n meßbar in der Variablen t und es gebe eine auf jedem beschränkten Intervall von $\mathbb{R}_+$ integrierbare Funktion m_n , so daß für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left| f_n(t,x_0,x_1,\ldots) \right| \leq m_n(t) \quad .$$

Zu einem Anfangswert $(x_0^o, x_1^o,..)$ gebe es genau eine Lösung obigen Systems (im Sinne von Caratheodory) auf einem Intervall $[0,t_e]$, $t_e > 0$.

Als weitere Voraussetzung sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ $f_n(t,x_0,x_1,\ldots)$ monoton steigend in jeder der Variablen

$$x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+1},\ldots \quad .$$

(Man beachte, daß dies nicht bezüglich der Variablen x_n verlangt wird. Deshalb bezeichnet man diese Eigenschaft als "Quasimonotonie", siehe auch DEIMLING.)

Unter obigen Voraussetzungen haben wir die

Differentialungleichung

Sei $(x_0^o, x_1^o, \ldots)$ ein Anfangswert und $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots)$ die nach Voraussetzung eindeutig existierende Lösung des Systems auf $[0, t_e]$.

Hat man eine Folge absolutstetiger Funktionen $(y_0(t), y_1(t), \ldots)$ auf $[0, t_e]$ mit

$$y_n(0) \leq x_n^o \quad , n \in \mathbb{N}_o$$

$$\dot{y}_n(t) \leq f_n(t, y_0(t), y_1(t), \ldots) \quad , n \in \mathbb{N}_o$$

Lebesgue-fast überall auf $[0, t_e]$,

dann gilt für jedes $t \in [0, t_e]$

$$y_n(t) \leq x_n(t) \quad , n \in \mathbb{N}_o \, .$$

Man beachte, daß im Falle eines endlichen Systems die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems bereits aus den Caratheodory-Bedingungen folgt und speziell bei linearen Systemen wie Systeme (3.4) und (3.5) diese eindeutig ist (siehe etwa WALTER, p.82).

Zur Anwendung auf S.57 sei vermerkt, daß alle Voraussetzungen für die Differentialungleichung erfüllt sind.

$q^{(N)} \leq p^{(N)}$:

$y(0) = p^o = x^o$, $y_n(t) = (A^{(N)}(t)y(t))_n \leq (B^{(N)}(t)y(t))_n$

$\underline{q^{(N-1)} = q^{(N)}}$:

$y(0) = p^0 = x^0$, $y_n(t) = (A^{(N-1)}(t)y(t))_n$

$\leq (A^{(N)}(t)y(t))_n$

Bei dieser Abschätzung berücksichtige man

$y_N(t) = q_N^{(N-1)}(t) \equiv 0$.

Literaturverzeichnis

BAUER, H. (1974)
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie;
(2., erweiterte Auflage)
Walter de Gruyter, Berlin

BELL, D. J. / JACOBSON, D. H. (1975)
Singular Optimal Control Problems;
Academic Press, London

BELLMAN, R. (1971)
Introduction to the Mathematical Theory of Control
Processes, Vol. II: Nonlinear Processes;
Academic Press, New York

BENSOUSSAN, A. / LIONS, J.-L. (1978)
Applications des inéquations variationelles en contrôle
stochastique;
Dunod, Paris

BERKOVITZ, L. D. (1974)
Optimal Control Theory;
Springer-Verlag, New York

BREIMAN, L. (1968)
Probability;
Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts

BREMAUD, P. (1976)
Bang-Bang Controls of Point Processes;
Adv. Appl. Prob. 8, 385-394

BREMAUD, P. / JACOD, J. (1977)
Processus ponctuels et martingales: résultats récents sur
la modélisation et le filtrage;
Adv. Appl. Prob. 9, 362-416

BRYSON, A. E. / HO, Y. (1975)
Applied Optimal Control;
John Wiley & Sons, New York

ÇINLAR, E. (1975)
Introduction to Stochastic Processes;
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

DEIMLING, K. (1977)
Ordinary Differential Equations in Banach Spaces;
Springer-Verlag, Berlin

DELLACHERIE, C. (1972)
Capacités et Processus Stochastiques;
Springer-Verlag, Berlin

DELLACHERIE, C. / MEYER, P.-A. (1975)
Probabilités et Potentiel (Chapitres I á IV, Edition entièrement refondue);
Hermann, Paris

FLEMING, W. H. / RISHEL, R. W. (1975)
Deterministic and Stochastic Optimal Control;
Springer-Verlag, Berlin

JACOD, J. (1975)
Multivariate Point Processes: Predictable Projection, Radon-Nikodym Derivatives, Representation of Martingales;
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 31, 235-253

LEDERMANN, W. / REUTER, G. E. H. (1954)
Spectral Theory for the Differential Equations of Simple Birth and Death Processes;
Phil. Trans. Royal Soc., London, Series A, vol. 246, 321-369

LIPSTER, R. S. / SHIRYAYEV, A. N. (1977)
Statistics of Random Processes I, II;
Springer-Verlag, New York

MAN, F. T. (1973)
Optimal Control of Time-Varying Queuing Systems;
Management Science, 19, 1249-1256

MEYER, P.-A. (1966)
Probabilités et Potentiel;
Hermann, Paris

NEVEU, J. (1966)
Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie;
R. Oldenbourg Verlag, München

SHAW, L. (1973)
Solutions for Infinite-Matrix Differential Equations;
J. Math. Analysis Appl. 41, 373-383

SHIRYAYEV, A. N. (1978)
Optimal Stopping Rules;
Springer- Verlag, New York

STIDHAM, S. / PRABHU, N. U. (1974)
Optimal Control of Queueing Systems;
Lecture Notes Economics and Math Systems 98, 262-294,
Springer-Verlag, Berlin

SZARSKI, J. (1965)
Differential Inequalities;
Polska Akademia Nauk, Warschau

WALTER, W. (1976)
Gewöhnliche Differentialgleichungen;
Springer-Verlag, Berlin

LEBENSLAUF

Name:	Karl-Heinz Keil
Geboren:	22. Januar 1948 in Bayreuth
Eltern:	Christian Keil, Speditionskaufmann i. R., verstorben Johanna Keil, geb. Kolb, Hausfrau
Familienstand:	verheiratet seit 24. September 1971 mit Ruth Keil, geb. Gschneidinger, Realschullehrerin (derzeit Hausfrau) Geburt von Sohn Thomas am 5. August 1977
Schulen:	1954-1958 Volksschule in München 1958-1967 Erasmus-Grasser-Gymnasium München 1967 Reifezeugnis
Bundeswehr:	Okt.1967-März 1969 als Wehrpflichtiger
Studium:	SS 1969-SS 1974 Mathematik mit Schwerpunkt Wahrscheinlichkeitstheorie und mit Nebenfach Angewandte Statistik an der Ludwig-Maximilians-Universität München Nov.1974 Diplom in Mathematik
Berufliche Tätigkeit:	Feb.1975-Nov.1975 bei der Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft angestellt, seit 15. November 1975 Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Seminar für Angewandte Stochastik (Lehrstuhl Prof. Dr. F. Ferschl) an der Ludwig-Maximilians-Universität München

München, den 26. Februar 1979